

Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины  
Харьковский национальный университет имени В.Н.Каразина

**В.А.Шкловский, В.И.Белецкий**

**ЛОКАЛИЗАЦИЯ И МЕЗОСКОПИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ  
В МЕТАЛЛАХ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ**

Учебное пособие

**Харьков - 2011**

УДК 539.2

В.А.Шкловский, В.И.Белецкий. Локализация и мезоскопические эффекты в металлах при низких температурах. Учебное пособие.- Харьков.: ХНУ, 2011 г. - 99 с.

Приведено основное содержание курса лекций, который читается на протяжении ряда лет студентам 4 – 5-го курсов кафедры физики низких температур физического факультета.

Рассматриваются новые аспекты физики низкотемпературной электропроводности металлов, которые сформировались в последние 20 лет. Обсуждаются: слабая локализация, андерсоновская локализация, прыжковая проводимость андерсоновского изолятора, скейлинговая теория сильной локализации, перколяционная электропроводность макронеупорядоченных композитов на языке фрактальных представлений, мезоскопические эффекты в низкотемпературной проводимости, универсальные флуктуации кондактанса и  $1/f$  шум.

В.О.Шкловський, В.І.Білецький. Локалізація і мезоскопічні ефекти у металах при низьких температурах. Навчальний посібник.- Харків.: ХНУ, 2011 р. - 99 с.

Наведений основний зміст курсу лекцій, який викладається протягом кількох років студентам 4 – 5-го курсу кафедри фізики низьких температур фізичного факультету.

Розглянуті нові аспекти фізики низькотемпературної електропровідності металів, які сформувались в останні 15 років. Обговорюються: слабка локалізація, андерсонівська локалізація, стрибкова провідність андерсонівського ізолятора, скейлінгова теорія сильної локалізації, перколяційна електропровідність макронеупорядкованих композитів мовою фрактальних уявлень, мезоскопічні ефекти у низькотемпературній провідності, універсальні флуктуації кондактансу і  $1/f$  шум.

Список литературы: 4 ссылки.

Рекомендовано к печати Ученым советом  
физического факультета  
протокол №     от                             2011 г.

## Введение.

Практически до конца 70-х годов XX - го века казалось, что теория электропроводности металлов при низких температурах в основном завершена и последующее ее развитие (связанное также и с учетом квантовых поправок) не изменит ее основных положений. Однако последующие затем 10 лет показали, что низкотемпературное поведение металлов радикально отличается от ранее предполагавшегося.

Здесь следует сказать, что речь идет о статически дефектных металлах, т.е. металлах с не зависящей от температуры  $T$  конечной упругой длиной свободного пробега электронов  $l_i$ . Если в "чистом" металле основным механизмом рассеяния электронов являются столкновения электронов с фононами и между собой, то в "грязных" металлах (определяемых соотношением  $l_i \ll l_{ep}(T), l_{ee}(T)$ ) при  $T \rightarrow 0$  всегда преобладает примесное рассеяние. Таким образом, при  $T \rightarrow 0$  любой (даже, казалось бы, идеальный) металл становится "грязным" (хотя бы за счет рассеяния на термодинамически равновесных дефектах кристаллической структуры – вакансиях).

В наших лекциях мы будем различать 2 типа статического "электронного" беспорядка – микро- и макробеспорядок. За микро-беспорядок ответственны в первую очередь точечные "0"- мерные дефекты с характерным масштабом порядка атомных (примесные атомы и вакансии), а иногда и протяженные дефекты – 1- и 2- мерные (дислокации и границы раздела кристаллитов). Макробеспорядок наиболее характерен для гранулированных систем типа металл-изолятор (М-И). Характерные масштабы металлических гранул обычно больше или порядка  $100 \text{ \AA}$  и проводимость таких

систем в первую очередь определяется так называемыми протекательными свойствами композита, т.е. наличием связанной сетки путей протекания контактирующих металлических кластеров.

В первых двух лекциях мы займемся слабым микробеспорядком, который теоретики могут изучать по теории возмущений, и рассмотрим так называемые квантовые поправки к низкотемпературной электропроводности на примере двух механизмов - квантовой интерференции невзаимодействующих электронов и эффекта усиления электрон - электронного взаимодействия (ЭЭВ).

В третьей и последующих лекциях мы перейдем к изучению влияния сильного беспорядка на электропроводность. Здесь мы познакомимся с так называемой андерсоновской локализацией, ведущей к переходу металл-диэлектрик, и описанием прыжковой проводимости на диэлектрической стороне перехода.

Затем мы перейдем к изучению электропроводности макроскопически неоднородных сред на языке представлений об их перколяционной проводимости, а также познакомимся с фрактальными представлениями в теории перколяции (лекция 6).

Наконец, завершающими будут лекции о мезоскопических эффектах в низкотемпературной электропроводности металлов.

Здесь достаточно подробно обсуждаются физические соображения, приводящие к существованию универсальных флуктуаций кондактанса и  $1/f$  шума в мезоскопике.

Для предварительного ознакомления с материалом все лекции сопровождаются планом изложения. Все лекции завершаются рядом контрольных вопросов, которые могут быть использованы как в аудиторной работе, так и при составлении экзаменационных билетов.

Мы приводим очень краткий список только доступной для студентов литературы, в которой изложена основная часть

рассмотренных в лекциях вопросов [1-4]. Книга [4] – увлекательное изложение рассматриваемых вопросов в рамках библиотеки «Квант», которую мы настоятельно рекомендуем для ознакомительного чтения.

Этот курс лекций читается в течение ряда лет на кафедре физики низких температур физического факультета проф. Шкловским В.А. и подготовлен к печати при непосредственном участии доц. Белецкого В.И.

Рекомендованная литература:

1. А.А.Абрикосов. Основы теории металлов. – М.: Наука, 1987 г.
2. Б.И.Шкловский, А.Л.Эфрос. Электронные свойства легированных полупроводников. – М.: Наука, 1979 г.
3. Н.Мотт, Э.Девис. Электронные процессы в некристаллических веществах, т. 1. – М.: Мир, 1974 г.
4. А.Л.Эфрос. Физика и геометрия беспорядка. – М.: Наука, 1982.

## Лекция 1.

### ПРОБЛЕМА БЕСПОРЯДКА В ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ (невзаимодействующие электроны).

1.1 Классические результаты для  $\rho(T)$  при  $T \rightarrow 0$ : формула Друде и правило Матиссена.

Электроны в чистом металле являются хорошо определенными квазичастицами с (квази)импульсом  $\mathbf{p}$ . Они слабо взаимодействуют между собой и с фононами, и подчиняются ферми-статистике. Это значит, что в электропроводности участвуют лишь электроны с энергией в узком слое шириной  $\Delta\varepsilon \approx T$  вблизи энергии Ферми  $\varepsilon_F$ , где  $T$  – температура, измеряемая в энергетических единицах. Простейшее выражение (формула Друде) для электропроводности электронного газа может быть записано в виде:

$$\sigma = \frac{ne^2 \tau(T)}{m} \quad \text{или} \quad \rho = \frac{mv(T)}{ne^2} \quad (1.1)$$

Здесь  $n$  – плотность электронов,  $e$ ,  $m$  – заряд и эффективная масса электрона,  $\tau$  – среднее время релаксации импульса электрона, зависящее, вообще говоря, от температуры  $T$ ,  $\tau \approx l/v_F$ ,  $l$  – длина свободного пробега,  $v_F$  – скорость Ферми,  $\nu = 1/\tau$  – частота столкновений электрона. Для столкновений электрона с примесями, другими электронами и фононами имеем известные оценки:

$$\tau = \begin{cases} \tau_i \sim T^0 \\ \tau_{ee} \sim T^{-2} \\ \tau_{ep} \sim T^{-5} \end{cases} \quad \nu = \begin{cases} \nu_i \sim \tau_i^{-1} \\ \nu_{ee} \sim (\varepsilon_F / \hbar)(T / \varepsilon_F)^2 \\ \nu_{ep} \sim (\theta_{\bar{A}} / \hbar)(T / \theta_{\bar{A}})^5 \end{cases} \quad (1.2)$$

Если сосуществуют разные механизмы рассеяния, то имеет место аддитивность сопротивлений (так называемое правило Матиссена):

$$\rho(T) = \rho_i + \delta\rho(T)$$

а  $\sigma(T) = \sigma_i - \sigma_i^2 \delta\rho(T)$  , если  $\delta\rho \ll \rho_i$

Заметим, что так как  $\rho_{ee}$  и  $\rho_{ep}$  стремятся к нулю при  $T \rightarrow 0$ , то  $\rho(T \rightarrow 0) \rightarrow \rho_i$  - так называемому «остаточному» сопротивлению.

### 1.2. Диффузия электрона в классическом описании.

Движение электрона при  $T \rightarrow 0$  в поле примесей носит диффузионный характер, т.е.  $R_N^2 = Nl^2$ , характер, т.е.  $R_N^2 = Nl^2$ ,

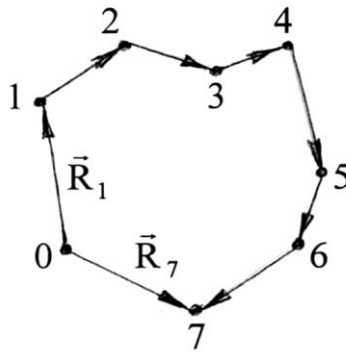


Рис.1.1.

где  $R_N^2$  - средний квадрат перемещения за  $N$  шагов со средним расстоянием между шагами  $l$  (рисунок 1.1). Удобно ввести  $D \approx l^2 / \tau = lv_F$  - коэффициент диффузии. Тогда  $R^2 = Dt$ .

Оценка для  $\tau$  через  $D$  имеет вид  $\sigma \approx n(0)e^2D$ , где  $n(0) \approx n / \varepsilon_F$  - плотность электронных состояний на уровне Ферми. На формальном языке задача о диффузии означает, что  $P(R,t)$  - вероятность нахождения электрона на расстоянии  $R$  от начала координат в момент времени  $t$  - удовлетворяет уравнению диффузии

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \cdot \Delta P \quad , \text{ где } \Delta \equiv \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad . \quad (1.3)$$

Для источника частиц в начале координат решение этого уравнения есть ( $d$ -размерность пространства)

$$P(R,t) = (4\pi Dt)^{-d/2} \exp(-R^2 / 4Dt) \quad . \quad (1.4)$$

Ниже мы воспользуемся этим выражением.

### 1.3. Квантовые поправки к классической диффузии.

Подведем итог классического подхода:

$$\rho(T) = \rho_0 + AT^p, \text{ где } A > 0 \text{ и } 2 < p < 5. \quad (1.5)$$

Немногим более 20-ти лет назад стало понятным, что почти все в приведенном классическом описании  $\rho(T)$  при  $T \rightarrow 0$  является принципиально неверным (даже в пределе малой концентрации дефектов). Коэффициент  $A$  может быть больше или меньше нуля, а  $p = 1/2$  для трехмерных систем ( $d = 3$ ).

Классическое описание электропроводности металлов на базе кинетического уравнения Больцмана (для функции распределения электронов) предполагает, что между актами рассеяния электрон движется по классической траектории. Это справедливо лишь при условии пренебрежения квантовомеханической интерференцией амплитуд рассеяния электрона на различных примесных центрах. Соответствующий критерий-условие  $\lambda \ll l$  ( $\lambda$  - де-бройлевская длина волны). Если это условие не выполнено, т.е.  $\lambda \geq l$ , то при  $T = 0$  имеем  $\sigma \rightarrow 0$ , т.е. наступает андерсоновская локализация, которую мы обсудим в лекции 3.

Однако, если все же  $\lambda \ll l$ , то уже имеются малые (в меру параметра  $\lambda / l \ll 1$ ) квантовые поправки к  $\sigma$ , которые оказываются существенными, так как в отличие от  $\sigma_i$  (остаточной проводимости) они обладают нетривиальной зависимостью от температуры  $T$ , внешних полей и размеров образца. Эти поправки появляются даже в случае идеального (невзаимодействующего) электронного газа и называются квантовыми интерференционными поправками.

Перейдем к качественному рассмотрению физической природы этих поправок. Она связана с тем, что рассеяние "квантового"



электрона на хаотически расположенных отдельных примесях перестает быть независимым (как в классическом случае), а содержит интерференционную добавку (соответствующую усилению рассеяния "назад"), не исчезающую при усреднении по различным конфигурациям примесных центров. Действительно, рассмотрим вероятность перехода электрона из точки  $A$  в точку  $B$  по двум различным путям с амплитудами прехода  $A_1$  и  $A_2$ .

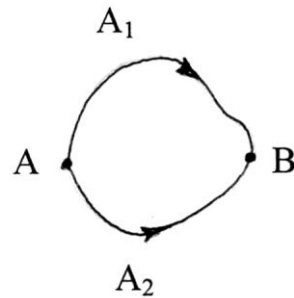


Рис 1.2

$$\begin{aligned}
 W_{A \rightarrow B} &\sim |A_1 + A_2|^2 = (A_1 + A_2)(A_1^* + A_2^*) = \\
 &= |A_1|^2 + |A_2|^2 + A_1 A_2^* + A_1^* A_2 = W_{\bar{e}\bar{e}} + W_{\bar{e}\hat{a}}, \\
 &\text{где } W_{\bar{e}\bar{e}} \equiv |A_1|^2 + |A_2|^2 \\
 &W_{\bar{e}\hat{a}} \equiv A_1 A_2^* + A_1^* A_2. \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

Классическое приближение состоит в пренебрежении интерференционной добавкой, что справедливо по параметру  $\lambda / l \ll 1$ . Физически это связано с тем, что интерференционные вклады от большинства траекторий взаимно погашаются, так как фазы  $\phi$  входящих волн в данной точке хаотичны (деструктивная интерференция).

Однако более подробное рассмотрение показывает, что есть траектории, для которых всегда, вне зависимости от хаотичности расположения примесей, интерференция всегда является конструктивной, т.е. величина  $W_{\kappa\nu} \neq 0$ . Именно, это – возвратные (в классическом смысле) траектории, для которых, как легко понять,  $W_{\kappa\nu} = W_{\nu\kappa}$  действительно,

при замене  $\left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow -t \\ \vec{p} \rightarrow -\vec{p} \\ d\vec{l} \rightarrow -d\vec{l} \end{array} \right\}$  величины  $A_1 = |A_1|e^{-i\varphi_1}$  и  $A_2 = |A_2|e^{-i\varphi_2}$ ,

не изменяются, т.к.  $\varphi \equiv \frac{\oint \vec{p} d\vec{l}}{\hbar} \equiv \frac{S}{\hbar}$  также остается неизменным.

Здесь  $S$  – квантовомеханическое действие. С учетом  $A_1 = A_2$  имеем  $W_{кв} = W_{кл}$ . Важно, что "квантовый", т.е. интерференционный вклад от таких траекторий не исчезает (конечен) при усреднении по примесям. Это типично "волновой" эффект, что отчетливо

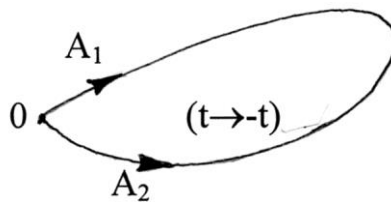


рис 1.3

демонстрируется экспериментами по рассеянию света в мутной среде (см. рис.1.4), где  $I$  – интенсивность рассеяния, а  $\theta$  – угол рассеяния.

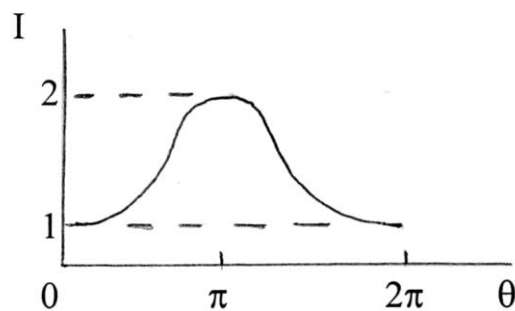


Рис.1.4.

Итак, в пределах  $t < \tau_\varphi$  (где  $\tau_\varphi$  - время сохранения фазовой когерентности электрона) электрон рассеивается на примесях когерентно, а не независимо. В этом суть эффекта.

Перейдем к количественному анализу относительной поправки  $\delta \sigma / \sigma$ , возникающей за счет учета возвращающихся в исходную точку

$R = 0$  электронов, что можно эффективно учесть через величину  $\delta n$  - уменьшение плотности электронов  $n$  в данной точке. Так как

$$\sigma \approx \frac{ne^2\tau}{m}, \quad \text{то} \quad \frac{\delta\sigma}{\sigma} \approx \frac{\delta n}{n}.$$

Имеем 
$$\delta n \equiv - \int_{\tau}^{\tau_{\varphi}} P(0,t) n \lambda^{d-1} v_F dt, \quad (1.7)$$

где  $n \lambda^{d-1} v_F dt$  есть число электронов покидающих окрестность точки

"0" объема  $d\Omega$ . Тогда

$$\frac{\delta n}{n} \equiv - \int_{\tau}^{\tau_{\varphi}} P(0,t) \lambda^{d-1} v_F dt \approx \int_{\tau}^{\tau_{\varphi}} \frac{\lambda^{d-1} v_F dt}{(Dt)^{d/2}}, \quad (1.6)$$

где  $\tau_{\varphi}$  - время сбоя фазы электрона (потери квантовомеханической когерентности), а  $\tau$  - минимальное время применимости диффузионного описания. Итак

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma} \approx - \int_{\tau}^{\tau_{\varphi}} \frac{\lambda^{d-1} v_F dt}{(Dt)^{d/2}} \approx - \frac{\lambda^{d-1} v_F}{D} \int_{l^2}^{L_{\varphi}^2} \frac{dz}{z^{d/2}}, \quad (1.8)$$

так как  $v_F/D \approx v_F/l$ ,  $v_F \approx 1/l$  то

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma} \approx \begin{cases} -\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 - \left(1 - \frac{l}{L_{\varphi}}\right) & d = 3 \\ -\left(\frac{\lambda}{l}\right) \ln(L_{\varphi}/l) & d = 2 \\ \frac{L_{\varphi}}{l} - 1 & d = 1 \end{cases}. \quad (1.9)$$

где  $L_{\varphi} \sim T^{-p}$  и стремится к бесконечности при  $T \rightarrow 0$ .

Если  $\sigma_d = \frac{ne^2\tau}{m} \approx \frac{1}{\lambda^d} \cdot \frac{e^2\tau}{m}$ , то  $\delta\sigma_d \approx -\frac{\sigma_d}{l} \lambda^{d-1} \int_{l^2}^{L_{\varphi}^2} \frac{dz}{z^{d/2}} \approx -\frac{e^2}{\hbar} \int_{l^2}^{L_{\varphi}^2} \frac{dz}{z^{d/2}}$  (1.10)

так как  $\sigma \cdot \frac{\lambda^{d-1}}{l} \sim \frac{e^2\tau}{\lambda^d m} \cdot \frac{\lambda^{d-1}}{l} \sim \frac{e^2\tau}{m\lambda l} \sim \frac{e^2}{p_F \lambda} \sim \frac{e^2}{\hbar}$

$$\left[ \frac{e^2}{\hbar} \right] = [G] = \frac{L}{T}; \quad [\sigma_d] = \left( \frac{L}{T} \right) L^{2-d}; \quad \frac{e^2}{\hbar} - \text{квант кондактанса}; \quad G = 1/R;$$

$$\left| \int \frac{dz}{z^{d/2}} \right| = \frac{L^2}{L^d} = L^{2-d} ; \quad [\bar{\delta}\omega_d] = \left( \frac{L}{T} \right) L^{2-d} .$$

#### 1.4. Качественный анализ поведения $\delta\sigma/\sigma$ в зависимости от размерности образца.

Проанализируем теперь степень расходимости  $\delta\sigma$  в зависимости от  $d$  при от  $d = 1, 2, 3$ . Легко видеть, что при  $T \rightarrow 0$  ( $L_\varphi \rightarrow \infty$ ) для  $d = 1, 2$  имеется тенденция к локализации, т.е.  $\delta\sigma/\sigma \rightarrow \infty$ . Можно предложить на качественном уровне три ответа на вопрос о причине 1- $d$  и 2- $d$  локализации (при сколь угодно малой степени беспорядка,  $T = 0$ ).

1. "Квантовомеханический": в одно- и двумерной ямах есть всегда уровень (хотя бы один), в двумерной – даже очень мелкой. В трехмерной – за счет "нулевых" флуктуаций или иными словами – принципа неопределенности – связанное состояние может отсутствовать (речь идет о ямах малой глубины, т.е. когда  $\bar{T} \gg \bar{V}$ ,  $\bar{\Delta} \gg \bar{T}$  и  $\bar{V}$  – средняя кинетическая и потенциальная энергии частицы соответственно).

2. "Диффузионный": вероятность "возврата" в диффузионной задаче по-разному ведет себя со временем диффузионных блужданий:

$$\begin{array}{lll} d = 1 & W \sim t^{1/2} \rightarrow \infty & (t \rightarrow \infty) \\ d = 2 & W \sim \ln t \rightarrow \infty & (t \rightarrow \infty) \\ d = 3 & W \sim t^{-1/2} \rightarrow 0 & (t \rightarrow \infty) \end{array} .$$

Здесь просто надо взять  $P(r, t)$  для  $r = 0$  ( $\delta$  – функциональный источник) и проинтегрировать его по времени с обрезанием, т.к. нельзя рассматривать времена, меньше чем  $\tau \equiv l^2 / D$ . В каком-то смысле уравнение Шредингера похоже на уравнение диффузии.

3. "Флуктуационный": флуктуации  $V(x)$  – случайного потенциала наиболее неблагоприятны для 1- $d$ , затем для 2- $d$ , и, наконец, 3- $d$  систем.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Упругое и неупругое рассеяние электронов. Различие и сходство.
2. Записать формулу Друде для проводимости через коэффициент диффузии электронов  $D$ .
3. Какова температурная зависимость времени «сбоя фазы»?
4. Покажите, что  $e^2 / \hbar$  имеет размерность кондактанса.

## Лекция 2

### ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КВАНТОВУЮ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННУЮ ПОПРАВКУ К ПРОВОДИМОСТИ И ЭФФЕКТЫ ЭЛЕКТРОН - ЭЛЕКТРОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

2.1. Напомним связь квантовомеханической и классической вероятности в отсутствие магнитного поля (см. рис.1.3 и формулу 1.6).

$$W_{\hat{a}\hat{a}} = A_1 A_2^* + A_1^* A_2 \equiv 2A^2 = W_{\hat{e}\hat{e}} \quad , \quad (2.1)$$

где  $A_1 = A_2 = Ae^{i\varphi}$  , а  $\varphi \equiv \frac{1}{\hbar} \oint \vec{p} d\vec{l}$  - фаза амплитуды возврата в

начало траектории. Пусть мы включили однородное магнитное поле

$\vec{H} = \text{rot}\vec{A}$  , направленное перпендикулярно траектории электрона где  $\vec{A}$  - вектор-потенциал поля. Тогда для учета влияния магнитного поля необходимо произвести, как известно, следующую замену:

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} .$$

В результате амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  изменяются следующим образом:

$$A_1 \rightarrow Ae^{-i\varphi_1} \quad , \quad \text{где} \quad \varphi_1 = \frac{1}{\hbar} \oint \vec{p} d\vec{l} - \frac{e}{\hbar c} \oint \vec{A} d\vec{l} = \varphi - \delta \quad \text{и}$$

$$A_2 \rightarrow A e^{-i\varphi_2} \quad , \text{ где } \quad \varphi_2 = \frac{1}{\hbar} \oint \vec{p} d\vec{l} + \frac{e}{\hbar c} \oint \vec{A} d\vec{l} = \varphi + \delta, \quad \text{ а}$$

$$\delta \equiv \frac{e}{\hbar c} \oint \vec{A} d\vec{l} = \frac{e}{\hbar c} \int \vec{H} d\vec{S} \equiv \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad , \quad (2.2)$$

где  $\Phi_0 = \pi \hbar c / e \approx 2 \cdot 10^{-7} \tilde{a} \tilde{n} \cdot \tilde{n} i^2$  есть квант магнитного потока. Здесь учтено, что при обращении движения величина  $d\vec{l} \rightarrow -d\vec{l}$ , а величины  $A$  и  $\vec{A}$  не изменяются. Окончательно

$$\begin{aligned} W_{\text{кв}} &= A_1 A_2^* + A_1^* A_2 = (e^{-i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} + e^{i\varphi_1} \cdot e^{-i\varphi_2}) A^2 = \\ &= A^2 (e^{2i\delta} + e^{-2i\delta}) = 2A^2 \cos(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}) \quad . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Итак, квантовая добавка к амплитуде рассеяния "назад" в магнитном поле осциллирует с периодом, равным кванту потока.

2.2. Оценим теперь характерные длины  $L_H$  и времена  $t_H$  сбой фазы в поле  $H$ , а также величину поля  $H_\varphi$  — поля сбой фазы, соответствующего  $\tau_\varphi$ .

Если поток изменяется на величину  $\Phi_0$ , то происходит сбой фазы. Так как  $L_H^2 H \sim \Phi_0$ , то  $L_H \sim \sqrt{\Phi_0 / H}$ . Учитывая, что  $L_H^2 \sim D t_H$ , имеем  $t_H \sim L_H^2 / D \sim \Phi_0 / D H$ . Если  $t_H \sim \tau_\varphi$ , то  $\Phi_0 / D H_\varphi \sim \tau_\varphi$ , т.е.  $H_\varphi \sim \Phi_0 / L_H^2 = \Phi_0 / D \tau_\varphi$ . На рис.2.1 показана зависимость  $L_H$  от величины поля  $H$ . Для  $H < H_\varphi$  осцилляции  $W_{\text{кв}}$  отсутствуют, а для  $H > H_\varphi$  — появляются.

Сравним теперь  $H_\varphi$  и  $H_{\text{кл}}$ , определяемое соотношением  $\omega_{H_{\text{кл}}} \tau \sim 1$ , где  $\omega_{H_{\text{кл}}}$  — ларморовская частота вращения электрона в магнитном поле  $H$ . Напомним, что для  $H > H_{\text{кл}}$  нужно учитывать эффекты искривления классической траектории на длине свободного пробега. В этом случае появляется зависимость  $\rho(H)$  в грязном металле. Величину  $H_{\text{кл}}$  находим из условия  $\omega_H \tau > 1$ ,  $\omega_H \equiv eH / mc$ ;  $H_{\text{кл}} \sim mc / e\tau$ . С другой стороны

$$H_\varphi \sim \frac{\Phi_0}{D\tau_\varphi} \sim \frac{hc}{2e} \cdot \frac{1}{lv_F\tau_\varphi} \sim \frac{hc}{e\lambda} \cdot \frac{\lambda}{lv_F\tau_\varphi} \sim \frac{c}{e} \cdot \frac{p_F\lambda}{lv_F\tau_\varphi} \sim$$

$$\sim \frac{cm}{e} \cdot \frac{\lambda}{l\tau_\varphi} \sim \frac{cm}{e\tau} \cdot \frac{\tau_F}{\tau_\varphi} \sim H_{\text{эв}} \cdot \frac{\tau_F}{\tau_\varphi} \ll H_{\text{кл}}, \text{ где } \tau_F \sim \frac{\lambda}{v_F} \sim 10^{-16} \text{ с}$$

Физическая причина аномальной чувствительности интерференционных поправок в полю  $H$  в том, что если в классическом случае  $H$  влияет на динамику электрона через силу Лоренца, то для квантовой поправки – это влияние на фазу волновой функции. Поля, при которых  $S/\hbar \geq 1$ , гораздо меньше, чем классические. Заметим, что чувствительность сквидов в сверхпроводимости связана с тем же обстоятельством.

Экспериментально эти эффекты наблюдаются в двух случаях.

1. Осцилляции сопротивления полого цилиндра (опыт Шарвиных 1981 года, см. рис. 2.2).

2. Аномальное магнитосопротивление пленок – проводимость растет с ростом  $H$ , т.е.  $\delta\sigma(H) > 0$ , тогда как в классическом случае она уменьшается с ростом  $H$ .

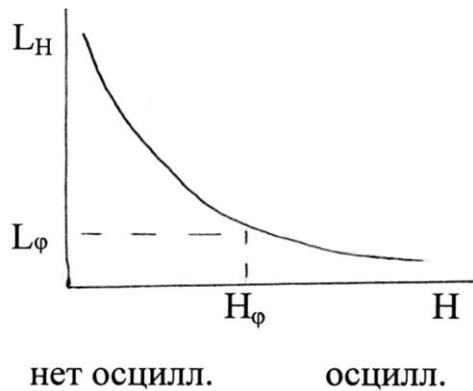


Рис.2.1

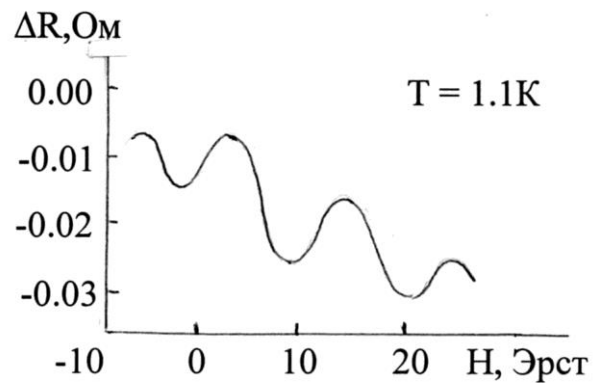


Рис. 2.2

## 2.3. Эффекты "усиления" электрон - электронного взаимодействия.

В этом разделе мы обсудим ( в основном на качественном уровне) то, каким образом даже слабый микроскопический беспорядок (например, примесное рассеяние) изменяет уже давно устоявшиеся представления о роли межэлектронного взаимодействия в металлах. Но сначала следует напомнить о последнем.

2.3.1. В металлах электрон-электронное взаимодействие (ЭЭВ) обычно не является слабым: средняя потенциальная энергия взаимодействия электронов обычно порядка их средней кинетической энергии, а она в свою очередь – порядка фермиевской ( $\bar{U} \sim \bar{T} \sim \varepsilon_F$ ). С другой стороны, большинство свойств электронов в металле хорошо описываются в рамках приближения свободных, т.е. невзаимодействующих, электронов. Это может быть обосновано тем, что с точки зрения теории ферми-жидкости (ФЖ) Ландау даже в системе сильно взаимодействующих электронов из-за принципа Паули ее низколежащие энергетические возбуждения являются слабо взаимодействующими квазичастицами, т.е. их затухание (за счет взаимного рассеяния)  $\Gamma \sim \hbar \nu_{ee} \ll \xi \sim T$ , где  $\nu_{ee} \sim (\varepsilon_F / \hbar)(T / \varepsilon_F)^2$  есть частота межэлектронных столкновений, а  $\xi \equiv \varepsilon - \varepsilon_F$  есть энергия квазичастиц. Действительно, вышеприведенное соотношение сводится к неравенству  $(T / \varepsilon_F)^2 \ll (T / \varepsilon_F)$ .

Как в теории свободных электронов, так и в теории ФЖ плотность электронных состояний на уровне Ферми является гладкой функцией энергии. До 1979 г. считалось, что слабый беспорядок практически не изменяет эту ФЖ картину. Однако, после работ Альтшулера и Аронова, (1979 г.) стало ясно, что это не так.



2.3.2. Оказалось, что теория ферми-жидкости Ландау годится лишь для трансляционно-инвариантных систем, когда импульс квазичастицы (или электрона) является хорошим квантовым числом (а вся "простота" теории идеальной ФЖ основана на такой классификации по импульсу (или квазиимпульсу в кристалле) из-за связи  $\varepsilon = p^2 / 2m$ ). В случае даже слабого беспорядка для энергий квазичастиц с  $\xi \leq \hbar / \tau$  ( $\tau$  – время упругой релаксации на примесях) импульс является "плохим" квантовым числом (не сохраняется после рассеяния) и поэтому основанная на классификации по нему систематика квантовых состояний не эффективна. Фактически взаимодействуют между собой не плоские волны (как это было раньше), а электронные волны, многократно рассеянные на примесях (случайном потенциале), которые удобно уже классифицировать только по энергии, т.к. она сохраняется в процессе упругого рассеяния.

Так как состояния с разными энергиями рассеиваются на одном и том же потенциале, то возникают, как это принято говорить, определенные корреляции между ЭЭВ и примесным рассеянием, что в конечном итоге, приводит к эффективному усилению ЭЭВ (т.е. росту амплитуды рассеяния квазичастиц друг на друге) для квазичастиц с близкими энергиями (т.е. малой передачей импульса).

Рассмотрим теперь несколько подробнее физику такого усиления ЭЭВ, имея в виду изменение запаздывающего характера динамического (вообще говоря, экранированного) кулоновского взаимодействия электронов в металле в присутствии примесей. Такое изменение происходит в связи с тем, что в "грязном" металле изменение распределения зарядов при рассеянии электронов друг на друге происходит не "мгновенно" (т.е. со скоростью  $v_F$ , как в чистом металле), а лишь путем диффузии электронов, которая тем медленнее,

чем на большее расстояние надо продиффундировать электрону ( см. рис. 2.3 ).

Поэтому, если  $\vec{q}$  – переданный в процессе рассеяния электронов импульс, то для  $\vec{q} \rightarrow 0$  (чему соответствуют большие расстояния), экранирование хуже, т.е. на малых  $\vec{q}$  кулоновское отталкивание с учетом примесного рассеяния растет, что грубо можно интерпретировать как следствие достаточно длительного взаимодействия двух электронов из-за диффузионного блуждания в поле примесей. Вследствие этого в неупорядоченных системах свойства

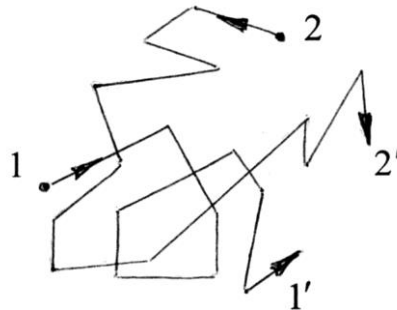


Рис.2.3

Возбуждений с энергиями, малыми по сравнению с обратным временем свободного пробега ( $\xi \ll \hbar / \tau$ ) отличается от предсказаний идеальной ферми-жидкости. Однако, в отличие от интерференционных поправок, которые влияли только на кинетику (то есть на величину проводимости), поправки к ЭЭВ появляются уже в термодинамике. Рассмотрим качественно поправку плотности состояний одночастичных возбуждений, связанную с взаимодействием электронов в неупорядоченной среде. Из-за принципа неопределенности два состояния электронов с разницей энергии  $\xi$  являются неразличимыми в течение времени  $t < \tau_\xi \equiv \hbar / \xi$  и поэтому будут интерферировать, т.е. складываться будут их амплитуды, а не вероятности. Пусть  $\mu$  – "затравочная" (безразмерная) константа взаимодействия двух электронов в чистом

металле. Так как частицы движутся диффузионно, то в течение времени взаимодействия  $\hbar/\xi$  они могут встретиться еще раз. Это можно представить себе, как изменение затравочной константы взаимодействия вида  $\mu_{eff} \approx (1 + \alpha_d)\mu$ , где  $\alpha_d$  -вероятность повторной встречи частиц.

Эта вероятность, как и прежде, имеет вид:

$$\alpha_d \sim \int_{\tau}^{\tau_{\xi}} \frac{v_F \lambda^{d-1} dt}{(Dt)^{d/2}} \sim \frac{1}{\hbar v_d D^{d/2}} \cdot \int_{\tau}^{\tau_{\xi}} \frac{dt}{t^{d/2}} \sim$$

$$\sim \frac{1}{\hbar v_d D^{d/2}} \cdot \begin{cases} \left( \frac{t^{1-d/2}}{1-d/2} \right) \Big|_{\tau}^{\tau_{\xi}} & (d=1,3) \\ \ln(\tau_{\xi} / \tau) & (d=2) \end{cases}, \quad (2.4)$$

т.к.  $v_F \lambda^{d-1} \approx \lambda^d (v_F / \lambda) \approx n_d^{-1} (v_F / (\hbar / p_F)) \approx \varepsilon_F / \hbar n_d \approx (\hbar v_d)^{-1}$ , а наличие  $\tau$  обуславливает существование  $\xi_{\tau} \sim \hbar / \tau$ , причем для грязных металлов ( пленок с  $d \leq 100 \text{ \AA}$  где  $\tau \leq 10^{-14} \text{ c}$  )  $\xi_{\tau} \geq 10^2 \text{ K}$ , т.е. достаточно велика. Тогда для энергий квазичастиц с  $\xi \ll \xi_{\tau}$  они движутся диффузионно, так как  $\tau_{\xi} \equiv \hbar / \xi \gg \tau$ . Именно такие квазичастицы в течение времени  $t < \tau_{\xi}$  будут «интерферировать» из-за их неразличимости на этих временах, а  $\tau_{\xi}$  будет тем интервалом времени, через который они смогут встретиться ещё раз (вероятность чего равна  $\alpha_d$ ).

Если считать, что относительные поправки ко всем физическим величинам  $\sim \delta\mu_{eff} \equiv \mu\alpha_d \ll \mu$ , то

$$\frac{\delta v_d(\xi)}{v_d} \sim \frac{-\delta\mu_{\text{eff}}}{\mu} \sim -\mu\alpha_d \approx -\frac{1}{\hbar v_d D^{d/2}} \cdot \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\tau}} - \frac{1}{\sqrt{\hbar/|\xi|}} & d=3 \\ \ln\left(\frac{\hbar}{\tau|\xi|}\right) & d=2 \\ \sqrt{\hbar/|\xi|} & d=1 \end{cases} \quad (2.5)$$

Таким образом, для трехмерной плотности состояний мы получаем:

$$\delta v_3(\xi) \sim \frac{1}{\hbar D^{3/2}} \left( \sqrt{\frac{|\xi|}{\hbar}} - \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right), \quad (2.6)$$

т.е. провал в плотности состояний физически это означает, что число носителей тока падает с уменьшением энергии возбуждения (см. рис. 2.4)).

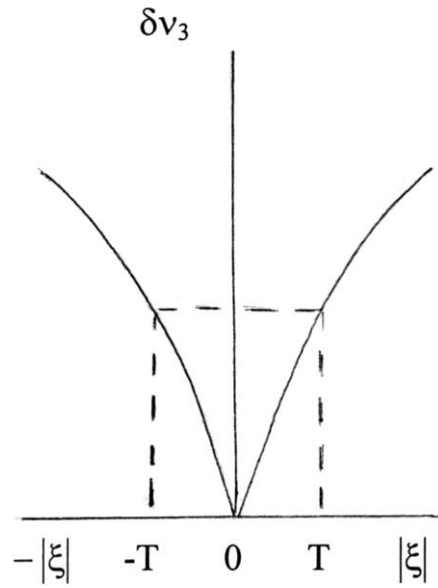


Рис 2.4

Фактически такой провал отразится в провале проводимости туннельного контакта металл изолятор-металл (М-И-М) при малых напряжениях  $T \ll eV \ll U$ , где  $U$  - высота барьера (см. след. раздел и рис 2.5).

### 2.3.3 Эксперименты по влиянию ЭЭВ на плотность состояний (DOS - density of states) .

Рассмотрим зависимость дифференциальной проводимости  $G \equiv dI/dV$  туннельных М-И-М контактов. Вольт-амперная характеристика ( ВАХ ) туннельного контакта в отсутствие ЭЭВ должна быть прямой, т.е.  $G = \text{const}$ . Однако при наличии ЭЭВ  $\delta G(V) / G_0 = \delta v_d (eV) / v_d \sim \xi^{1/2} \sim (eV)^{1/2}$  ( см. рис. 2.5), где с изменением величины  $x$  в одной из обкладок контакта образованного структурой  $Al - Al_2O_3 - Ge_{1-x}Au_x$  происходит переход металл – диэлектрик ( Mc Millan, Mochel (1981)).

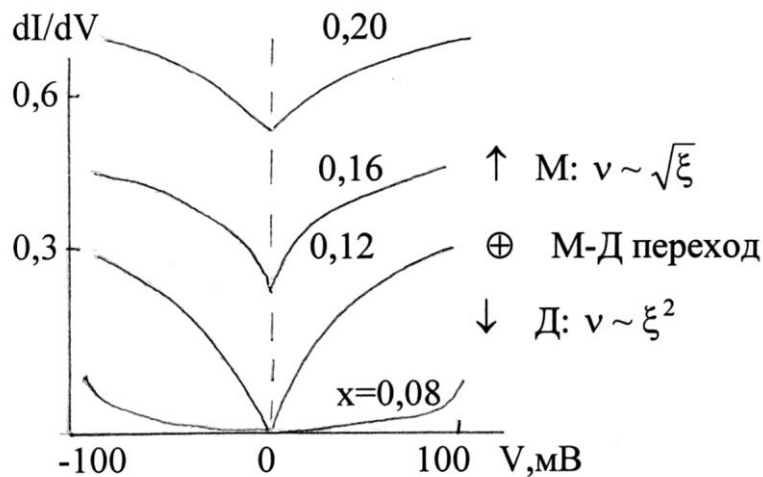


Рис.2.5

Аналогичные результаты были получены для туннельных контактов в М – I – М структуре на основе  $Ni_x (SiO_2)_{1-x}$  ( Abeles, Sheng (1974)), где

$$N(E) \sim N(0) \left[ 1 + \sqrt{\frac{E}{E_0}} \right].$$

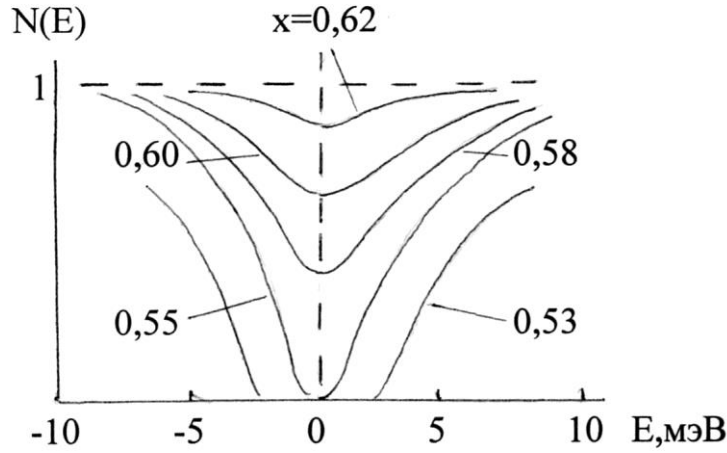


Рис.2.6

### 2. 3. Влияние ЭЭВ на проводимость (сравнение с интерференционной квантовой поправкой).

Воспользуемся связью  $\delta\sigma_d / \sigma_d \sim \delta v_d / v_d \sim -\alpha_d$ . Тогда для относительной квантовой добавки к проводимости за счет ЭЭВ имеем:

$$\frac{\delta\sigma_d^{ee}}{\sigma_d} \sim -\frac{1}{\hbar v_d D^{d/2}} \cdot \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\tau}} - \sqrt{\frac{|\xi|}{\hbar}} & \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\tau}} - \sqrt{\frac{\bar{D}}{\hbar}} & (d=3) \\ \ln\left(\frac{\hbar}{\tau|\xi|}\right) & \rightarrow \ln\left(\frac{\hbar}{\tau T}\right) & (d=2) \\ \sqrt{\hbar/|\xi|} & \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{T}} - \sqrt{\tau} & (d=1) \end{cases} \quad (2.7)$$

для  $T \ll \hbar/\tau$ . Сделаем простейшие оценки величины температуры  $T$ .

Если толщина пленки  $d_f \sim 10^3 \text{ \AA}$ ,  $\tau \sim d_f/v_F \sim 10^{-5} \text{ см}/10^8 \text{ см/с} \sim 10^{-13} \text{ с}$ , что соответствует  $T < \theta_D$  (а если пленка тоньше, то еще лучше).

С другой стороны, если  $L_\varphi^2 \equiv D\tau_\varphi$ , а  $\tau_\varphi = (\hbar/\varepsilon_F)(\varepsilon_F/T)^2$ , то  $L_\varphi^2 \equiv \hbar D\varepsilon_F/T^2$ , т.е.  $L_\varphi \sim 1/T$ ,  $L_\varphi^2 \sim (l\lambda)(\varepsilon_F/T)^2$ .

Для величины интерференционной относительной добавки к проводимости (см. лекцию 1) имеем:

$$\frac{\delta\sigma_d^{\text{int}}}{\sigma_d} \sim -\frac{e^2}{\sigma_d \hbar} \cdot \begin{cases} l^{-1} - L_\varphi^{-1} & \rightarrow T & (d=3) \\ \ln(L_\varphi / l) & \rightarrow -\ln T & (d=2) \\ L_\varphi - l & \rightarrow 1/T & (d=1) \end{cases} . \quad (2.8)$$

Тогда сравнение интерференционной и ЭЭВ квантовых добавок дает

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{ee} &\gg \delta\sigma_{\text{int}} & (d=3) \\ \delta\sigma_{ee} &\approx \delta\sigma_{\text{int}} & (d=2) \\ \delta\sigma_{ee} &\ll \delta\sigma_{\text{int}} & (d=1) \end{aligned} . \quad (2.9)$$

Таким образом при  $d=3$  поправка от ЭЭВ при  $T \rightarrow 0$  превышает интерференционную, а при  $d=1$  - наоборот. При  $d=2$  они одного порядка и возникает вопрос об их разделении.

Здесь существенной является зависимость интерференционной поправки от слабого магнитного поля, тогда как ЭЭВ вклад не изменяется в слабых полях (с учетом термодинамических соотношений).

#### 2.4 Спин-орбитальное рассеяние и слабая локализация.

Оказывается, что движущийся электрон в поле статических дефектов может испытывать переворот спина за счет так называемого спин-орбитального взаимодействия (СОВ), физическое происхождение которого таково. При переходе в систему отсчета, движущуюся совместно с электроном, в электростатическом потенциале  $V(r)$  к электрическому полю  $E = -\nabla V$  добавляется, в силу преобразований Лоренца, небольшое магнитное поле  $H \sim (v_F / c) \nabla V$  (эффект релятивистский). Соответственно, энергия СОВ есть

$$H_{SO} \sim (\vec{H} \cdot \vec{\sigma}) \sim \frac{v_F}{c} (\nabla V \cdot \vec{\sigma}) \sim \left(\frac{v_F}{c}\right)^2 f(z) , \quad (2.10)$$

где  $z$  - атомный номер. Обычно  $\langle H_{SO} \rangle \sim (10^{-2} \div 10^{-3})$  эВ.

Если  $\tau_{SO}$  - характерное время релаксации спина за счет СОВ, то

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} \sim -\int_{\tau}^{\tau_{\phi}} \frac{v_F \lambda^{d-1} dt}{(Dt)^{1/2}} \left( \frac{3}{2} e^{-t/\tau_{so}} - \frac{1}{2} \right), \quad (2.11)$$

т.е. по сравнению со случаем отсутствия СОВ необходимо произвести замену амплитуды рассеяния электрона  $1 \rightarrow \left( \frac{3}{2} e^{-t/\tau_{so}} - \frac{1}{2} \right)$ , где 3 соответствует триплетному состоянию двух электронов с полным спином 1. В двух предельных случаях: а)  $\tau_{so} \rightarrow \infty$ , т.е. нет СОВ и тогда  $1 \rightarrow 1$  и б)  $\tau_{so} \rightarrow 0$  и тогда  $1 \rightarrow -1$ .

Это приводит к видоизмененным формулам (см. книгу А.А. Абрикосова [1]), таким, что при  $\tau_{so} \ll \tau_{\phi}$  температурная зависимость приращения сопротивления  $\Delta\sigma(T)$  изменяет знак. Аналогично, зависимость  $\Delta\sigma(H)$  также меняет знак (см. рис. 2.7 из работы Van den Dries et al (1981): образец – пленка меди). Затем для  $H > \Phi_0/D\tau_0$  прежняя зависимость восстанавливается (см. рис. 2.8 из работы G.Bergmann (1984): образец - пленка меди  $d = 80 \text{ \AA}$ ).

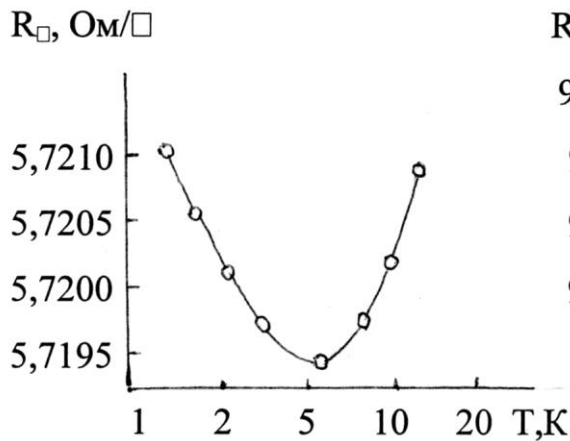


Рис.2.7

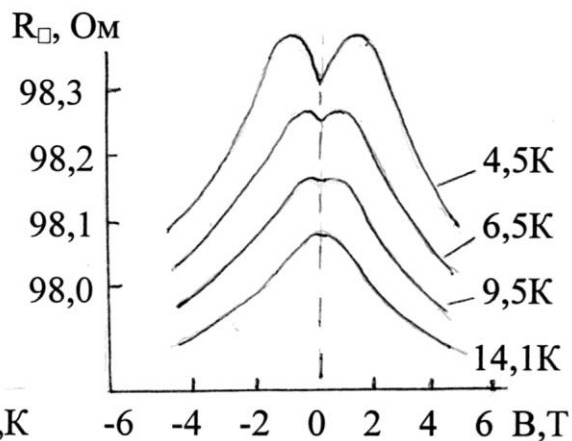


Рис.2.8

С физической точки зрения такое изменение знака  $\Delta\sigma$  при  $\tau_{so} \ll \tau_{\phi}$  можно рассматривать как переход от прежнего (при  $\tau_{so} \gg \tau_{\phi}$ , см. лекцию 1) удвоенного квантового увеличения исходной вероятности



рассеяния электрона «назад» к уменьшению вдвое этой вероятности за счет превалирования спин-орбитального рассеяния.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каким соотношением определяется ларморовский радиус электрона в магнитном поле – вывод.
2. Два типа воздействия магнитного поля на динамику электрона ( классическое и квантовое ).
3. Оцените энергию спин – орбитального взаимодействия.

### Лекция 3

#### АНДЕРСОНОВСКАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ

В этой лекции мы рассмотрим физические представления, возникающие при анализе перехода металл - диэлектрик в системе невзаимодействующих электронов в случайном потенциале. Такой переход связан с так называемой андерсоновской локализацией (АЛ). Однако, прежде чем переходить к обсуждению АЛ, заметим, что в проблеме влияния беспорядка на электропроводность металлов очевидны два качественно различных случая:

1.1. Беспорядок слабый, и его можно учесть по теории возмущений, сохранив все прежние представления зонной теории металлов. Электроны являются блоховскими волнами, классифицирующимися по квазиимпульсу  $\vec{p}$ . Во внешних полях они движутся по квазиклассическим траекториям, изредка изменяя свой квазиимпульс при рассеянии на дефектах ( $l \gg a$ ), где  $l$  – длина свободного пробега,  $a$  - постоянная решетки. Такое рассеяние можно описать в рамках уравнения Больцмана. В таком подходе можно даже выйти за рамки последнего, вычислив (как об этом уже говорилось) квантовые поправки в проводимости.

1.2. Беспорядок сильный ( $l \sim a$ ) - аморфные и жидкие металлы и сильно легированные полупроводники. В этом случае старая систематика состояний (по квазиимпульсу) уже отказывается – электронные волновые функции в  $r$  - представлении уже не имеют вида блоховских волн  $\phi_{\vec{p}}(r) = U_{\vec{p}}(r)e^{i\vec{p}r}$ , а скорее являются сильно затухающими волнами, т.е.  $\vec{p} = \vec{p}' + i\vec{p}''$ , где  $|\vec{p}''| \leq |\vec{p}'|$ , что можно трактовать, как сильное затухание блоховских амплитуд – (тогда как для идеального кристалла они периодичны  $U_{\vec{p}}(\vec{r}) = U_{\vec{p}}(\vec{r} + \vec{a})$ ). Энергетический спектр электрона (т.е. возможные значения энергии его стационарных состояний в кристалле) не имеет теперь простого вида  $\varepsilon = \varepsilon(\vec{\delta})$ , а сильным образом зависит от характеристик случайного потенциала в образце. Квазиклассическая траектория уже отсутствует - существенным является многократное рассеяние и сопутствующие ему эффекты сильной интерференции рассеянных электронных волн. В результате возможно, что электрон "локализуется" в некоторых областях случайного потенциала, так что его вклад в электропроводность на постоянном токе при  $T = 0$  может стать нулевым (как в диэлектрике).

В связи с ситуацией сильного ( $l \sim a$ ) беспорядка возникают естественные вопросы:

а) какие старые понятия отказываются? Из сказанного выше следует, что исчезает классификация по  $\vec{\delta}$ , представление о Ферми-поверхности, и о законе дисперсии  $\varepsilon = \varepsilon(\vec{\delta})$ .

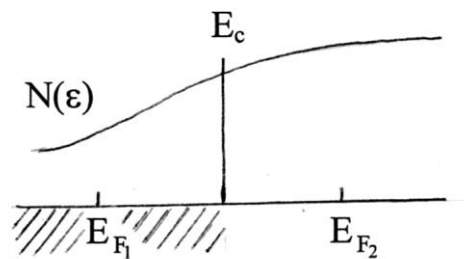
б) какие старые понятия остаются: плотность состояний  $N(\varepsilon)$  и понятие об энергии Ферми  $\varepsilon_F$  (для  $T = 0$ ).

в) какие новые понятия появляются: локализация электронов и понятие порога подвижности  $E_c$ .

С точки зрения поведения проводимости возникает новая ситуа-

ция: если в случае слабого беспорядка при  $T = 0$  всегда  $\sigma(0) \neq 0$  при  $N(\varepsilon_F) \neq 0$ , то в случае сильного беспорядка возможно  $\sigma(0) = 0$  при  $N(\varepsilon_F) \neq 0$  (макроскопический критерий локализации). Именно эта ситуация называется локализацией электронов образца. Таким образом, наличие электронов на уровне Ферми (точнее – с энергией Ферми) еще не обеспечивает конечную проводимость ( $\sigma(0) \neq 0$ ), которая возникает лишь для делокализованных (распространяющихся, extended) электронов. Если же на уровне Ферми имеются локализованные состояния, то  $\sigma(0) = 0$ .

Как следствие такого качественного различия (в смысле влияния на  $\sigma(0)$ ) делокализованных и локализованных состояний в описании энергетического спектра электронов возникает новое понятие о "пороге подвижности"  $E_c$ , как граничной энергии, разделяющей локализованные и делокализованные состояния (см. рис. 3.1).



$\sigma_1(0) = 0$ , лок.     $\sigma_2(0) \neq 0$ , делок.

Рис.3.1.

Тогда взаимное расположение  $E$  и  $E_c$  и определяет значение  $\sigma(0)$ .

2. Рассмотрим теперь на качественном микроуровне "механизм" возникновения и проявления локализации электронных состояний.

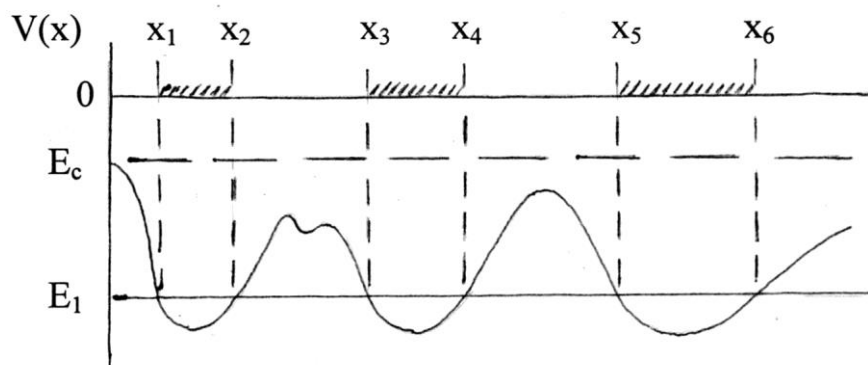


Рис.3.2.

2.1 Уместно такое качественное рассмотрение начать с анализа понятия локализации классической частицы в одномерном случайном потенциале  $V(x)$ . Изобразим одну из его возможных реализаций (рис.3.2.). Качественное отличие  $2d$  и  $1d$  задач – в  $2d$  случае возможно «обойти» препятствие, в  $1d$  случае – нет. Отметим такие классические аналогии, как «полет самолета в горах» или «затопление горной местности». Области локализации частицы с энергией финитного движения: на рис. 3.2 – это интервалы  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_3, x_4)$  и т.д.

Для  $E > E_c$  движение инфинитно, что соответствует полной делокализации. Классическое определение  $E_c$  – тривиально. В аналогичной квантовомеханической задаче определение областей локализации существенно усложняется благодаря двум новым обстоятельствам, отсутствующим в классической механике:

- а) Туннельному эффекту, который ведет к делокализации классически локализованных состояний.
- б) Надбарьерному отражению, ведущему, вследствие деструктивной интерференции, к локализации классически делокализованных состояний. Соответственно, условия локализации уже не так просты. Приведем три характерных примера, демонстрирующих указанные выше квантовомеханические особенности.

а) Туннелирование – в случае периодического потенциала  $V(x)$  в

пределе сильной связи  $\bar{T} \ll \bar{U}$  рассматривается образование узких зон  $E_2$  и связанных с ними блоховских делокализованных состояний (рис.3.3).

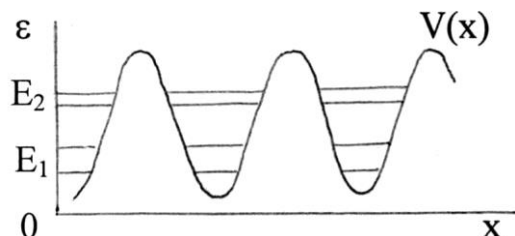


Рис.3.3.

б) Надбарьерное отражение – для случайного одномерного ( $d = 1$ ) потенциала независимо от энергии – локализация всегда наступает из-за сбоя фазы (теорема Мотта - Туза).

в) Надбарьерное отражение может вести и к конструктивной интерференции в приближении связи  $\bar{T} \gg \bar{U}$  для периодического потенциала  $V(x)$  (рис. 3.4).

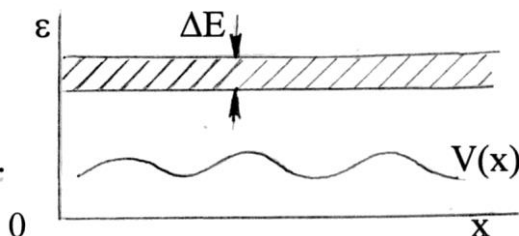


Рис.3.4.

2.2. Перейдем теперь к анализу тех основных физических параметров, которые "контролируют" возможность появления локализации в системе невзаимодействующих электронов. Для этого рассмотрим простую физическую модель, приводящую к локализации и предложенную Андерсоном (P.W. Anderson) еще в 1958 г. Представим себе решетку периодически расположенных потенциальных ям одинаковой ширины, но разной глубины (именно здесь реализуется элемент неупорядоченности (см. рис. 3.5)). Обозначим  $\epsilon_j$  - отклонение энергии

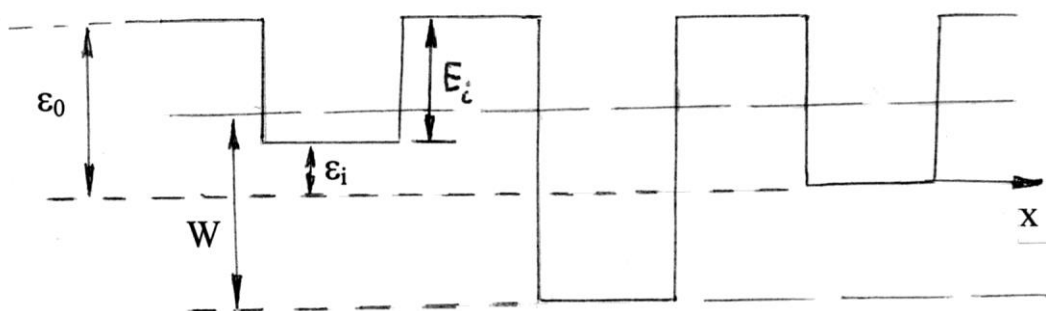


Рис.3.5.  $\varepsilon_i = \varepsilon_0 - E_i$

электрона на узле  $j$  от средней энергии  $\varepsilon_0$ . Величины  $\varepsilon_j$  на разных узлах считаются случайными величинами, между которыми нет корреляции, а распределение энергии в интервале  $W$  будем считать равномерным т.е.

$$P(\varepsilon) = \begin{cases} J/W, & \text{для } |\varepsilon| < W/2 \\ 0 & \text{для } |\varepsilon| > W/2 \end{cases} \quad (3.1)$$

Если случайности нет, т.е.  $W = 0$ , то это так называемая модель Кронига-Пенни, допускающая точное решение и дающая зонный спектр. К сожалению, модель Андерсона не допускает точного аналитического решения (в смысле нахождения спектра или плотности состояний  $N(\varepsilon)$  как функции  $W$ ). Тем не менее, возможно качественное рассмотрение, основанное на сравнительно простых физических соображениях (заметим, что расчеты на ЭВМ подтверждают их).

2.3. Для того, чтобы выяснить механизм появления локализации в модели Андерсона рассмотрим вспомогательную квантовомеханическую задачу о двух ямах разной глубины, расположенных на сравнительно большом (позднее мы увидим - в меру чего) расстоянии друг от друга. Будет показано, что в зависимости от соотношения между параметрами задачи происходит либо "обобществление" электрона ямами (т.е. он практически с равной вероятностью может

быть обнаружен в каждой из ям), либо его локализация (с подавляющей вероятностью) в одной из ям.

Однако, сначала удобно проанализировать (на качественном уровне) результаты рассмотрения симметричной задачи (так называемый "резонансный случай"), когда обе ямы одинаковы и "уширение" уровня в каждой из ям за счет "взаимодействия" с соседней ямой значительно меньше расстояния между уровнями в изолированной яме (см.рис 3.6). Как известно из квантовой механики, волновая функция электрона в изолированной прямоугольной яме такова, что вероятность нахождения электрона с данной энергией не зависит от его поло-

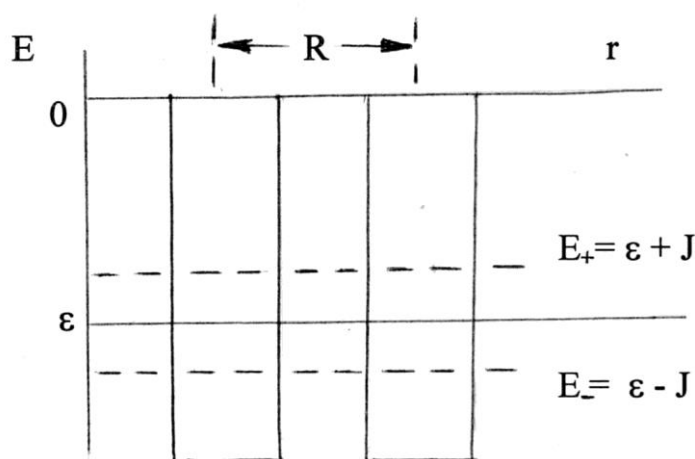


Рис.3.6.

жения в яме и экспоненциально убывает с координатой вне ямы. Если на расстоянии  $R$  от центра первой ямы находится точно такая же вторая, то именно за счет экспоненциально убывающих "хвостов" волновой функции имеется конечная вероятность обнаружить электроны из первой ямы во второй (и наоборот). В итоге, сближение двух одинаковых ям приводит к тому, что энергетический уровень в изолированной яме "расщепляется" на два уровня с энергиями  $E_{\pm} \equiv \varepsilon \pm J$ , где величина "раздвижки" уровней  $J$  определяется так называемым "интегралом перекрытия":

$$J_{\varepsilon}(R) = \int \varphi_1(x)H(x)\varphi_2(x)dx \sim J_0 e^{-\alpha_{\varepsilon}R} \quad , \quad (3.2)$$

который действительно является мерой перекрытия "хвостов" волновых функций соседних ям  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Существенно, что  $J_\varepsilon (R)$  экспоненциально убывает с расстоянием между ямами. Для величины  $\alpha(\varepsilon)$  и  $J_0$  имеем следующие оценки:

$$\alpha \sim p/\hbar \sim \sqrt{2m|\varepsilon|}/\hbar, \quad J_0 \sim \alpha e^2.$$

Первая оценка имеет порядок характерного волнового числа электрона с энергией  $\varepsilon$ , а вторая пропорциональна потенциальной энергии взаимодействия двух электронов на расстоянии  $r \sim \alpha^{-1}$ .

На рис. 3.7 а, б схематически дана координатная зависимость функций, соответствующих энергиям  $E_\pm$  уровней.

Итак, при сближении одинаковых ям происходит "обобществление" (иначе – "гибридизация") электрона так, что амплитуды волновых функций в ямах одинаковы, чему соответствует одинаковая вероятность найти электрон в каждой из ям. Для дальнейшего важно, что характер описанных выше решений мало изменяется, если для несимметричной ситуации ( $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ ) все же выполнено условие  $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \gg J$ , где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – энергии уровней в изо-

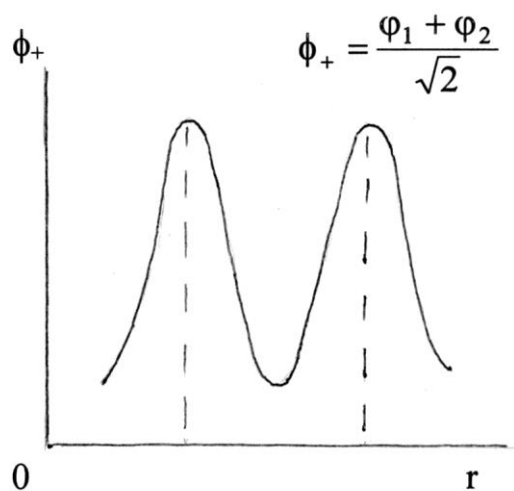


Рис.3.7.а

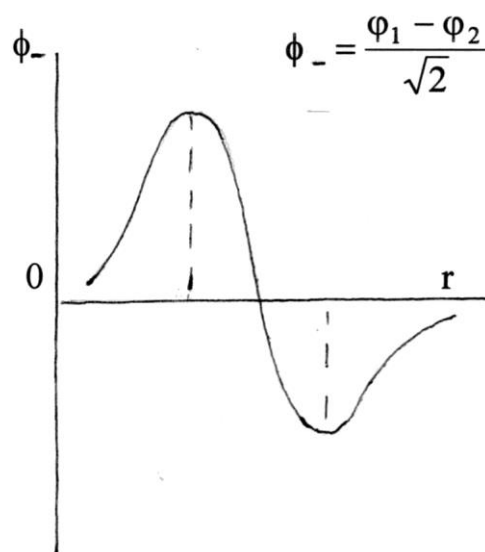


Рис.3.7.б



лированных ямах.

Если же в несимметричном случае реализуется обратная ситуация ( т.е.  $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \gg J$ ), то результирующая картина качественно изменяется (см. рис. 3.8 и рис. 3.9 а,б).

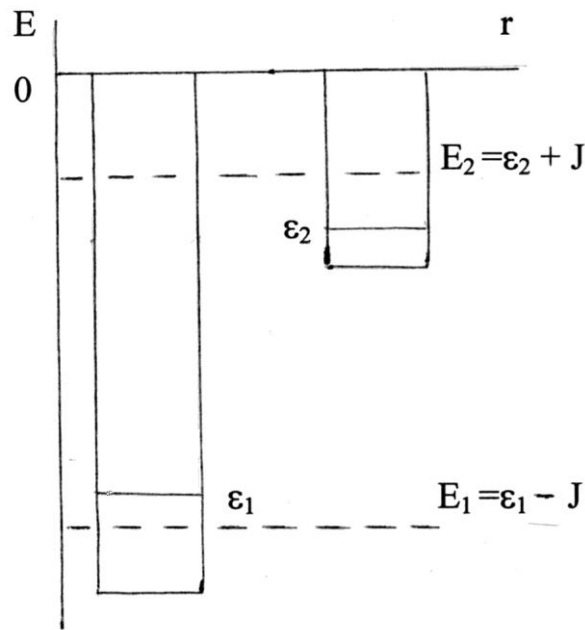


Рис.3.8.

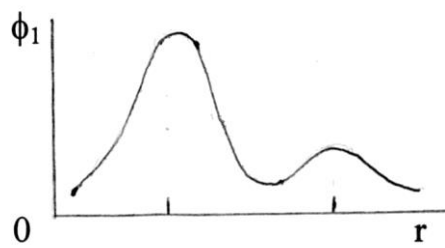


Рис.3.9.а

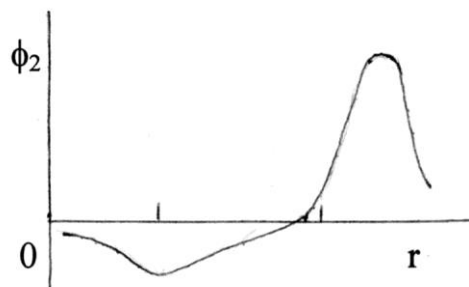
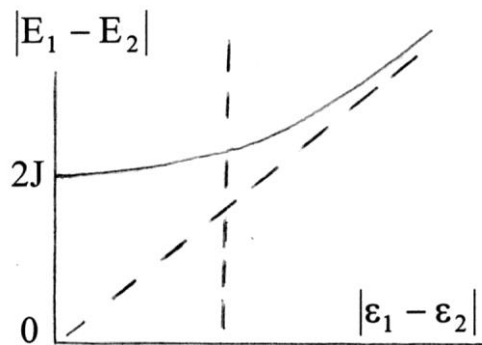


Рис.3.9.б

В этом случае электрон "локализуется" в одной из ям, т.е. "обобществление" электрона отсутствует. Как показывает расчет, в таком случае  $\phi_1 = \tilde{n}_1\varphi_1 + \tilde{n}_2\varphi_2$  и  $\phi_2 = \tilde{n}_2\varphi_1 - \tilde{n}_1\varphi_2$ , а  $c_2/c_1 \approx 1/|\varepsilon_2 - \varepsilon_1| \sim e^{-\alpha R} \ll 1$ , т.е. вероятность нахождения электрона в первой яме пропорциональна  $|c_1|^2$ , т.е. значительно больше, чем во второй яме. На рис. 3.10 представлена зависимость  $|\dot{A}_1 - \dot{A}_2|$  как функция первоначальной "раздвижки" уровней  $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ , из которой легко понять, что граница между обобществленными (слева от вертикальной линии на рисунке) (делокализованными) и локализованными (справа от нее) состояниями достаточно неопределенна.



обобществление                      локализация

Рис.3.10

## Лекция 4.

### АНДЕРСОНОВСКАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ

(продолжение)

2.4 Используем теперь "двухямные" результаты для качественного анализа критерия локализации в модели Андерсона. При этом удобно рассматривать появление локализации с увеличением степени беспорядка как фазовый переход металл - диэлектрик (М-И) в духе общей картины фазовых переходов второго рода.

Основными составляющими этой картины являются понятия параметра порядка (здесь это безразмерный кондактанс  $g \equiv G/(e^2/\hbar)$  образца) и корреляционной длины, стремящейся к бесконечности по мере приближения к точке фазового перехода (здесь это так называемая локализационная длина  $L_c$ ). Поясним физический смысл  $L_c$  при приближении к переходу со стороны диэлектрика.

Для этого вернемся к качественной картине "обобществления" электрона между двумя ямами, которое имеет место, если  $\Delta\varepsilon \leq J$ , и используем ее для рассмотрения "решетки Андерсона". Если рассмотреть полосу энергий порядка  $J$  (в спектре одночастичных состояний электрона), то назовем узлы, попадающие в эту полосу, *резонансными*, а вне ее – *нерезонансными*. Электронное состояние обобществляется между двумя резонансными узлами, если они являются ближайшими соседями. Будем также называть два резонансных узла связанными, если они являются ближайшими соседями или есть третий резонансный узел, который является ближайшим соседом их обоих. Два резонансных узла также являются связанными, если они соединены одной или несколькими цепочками из связанных друг с другом резонансных узлов. Назовем *кластером* совокупность

связанных друг с другом резонансных узлов. Квадрат волновой функции электрона одного порядка на всех узлах, принадлежащих данному кластеру и мал вне его, т.е. характерный масштаб изменения  $|\phi|^2$  определяется размером кластеров. Естественно назвать его длиной локализации, которая является корреляционной длиной М-И перехода. Так как распределение энергий  $\varepsilon_j$  в модели Андерсона считается равномерным в интервале энергий  $W$ , то доля резонансных узлов должна быть порядка  $J/W$ . Грубо говоря, когда эта доля станет порядка величины "порога протекания" в исследуемой решетке (определяемой как концентрация узлов, при которой впервые появляется бесконечный кластер), то в решетке впервые появляются делокализованные состояния. Этому соответствует бесконечное значение длины локализации  $L_c$  диэлектрика. Так, для кубической решетки машинные расчеты дают  $\delta_c \equiv W/J = 2.8$ .

Приведем для наглядности графики численных расчетов, иллюстрирующие динамику изменения плотности электронных состояний  $N(\varepsilon)$  в модели Андерсона по мере увеличения степени беспорядка ( Дж. Займан. Модели беспорядка, стр. 422). Из рис. 4.1 видно, что по мере роста безразмерного параметра  $\delta \equiv W/J$  сначала начинают появляться "хвосты"  $N(\varepsilon)$ , состояния в которых полностью локализованы, а затем область делокализованных состояний стягивается в точку при  $\delta = \delta_c \cong 2.8$ .

2.8. Если не интересоваться зависимостью  $N(\varepsilon)$ , а лишь размером области делокализованных (и, соответственно – локализованных) состояний, то эти же результаты можно изобразить на единой диаграмме на плоскости  $(W, \varepsilon)$  (см. рис. 4.2).

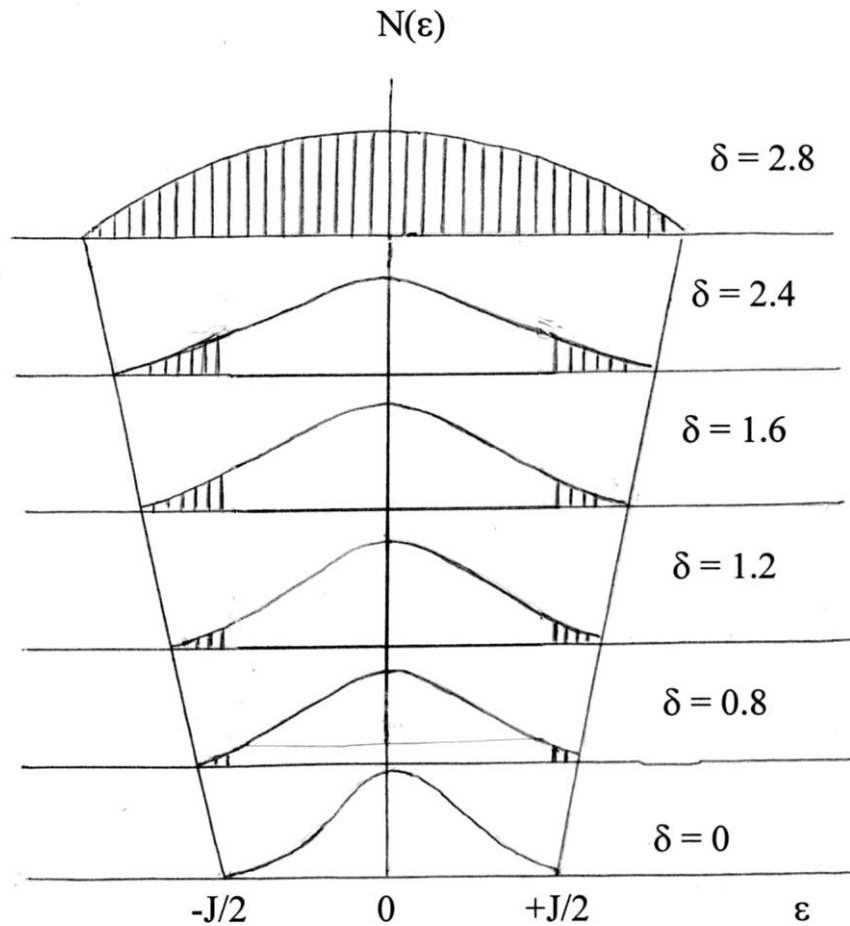


Рис.4.1. Динамика изменения  $N(\varepsilon)$  в модели Андерсона по мере роста беспорядка – наглядные графики ( Дж.Займан. Модели беспорядка. Стр. 422).



Рис. 4.2.

Фактическим безразмерным параметром является отношение  $\delta = W/J$ . Заштрихованы – локализованные состояния. Площадь под кривой плотности состояний одинаково для всех значений  $\delta$ .

Следует также отметить, что под термином "переход Андерсона" понимают не только описанное выше появление делокализованных состояний в энергетическом спектре электронов при уменьшении степени беспорядка, но и "пересечение" уровнем Ферми  $\varepsilon_F$  порога подвижности  $E_C$ , разделяющего делокализованные и локализованные состояния (см. рис. 3.1). В последнем случае делокализованные состояния уже есть и М-И переход происходит при изменении концентрации электронов (тогда как степень беспорядка остается заданной).

Подойдем теперь к понятию  $L_C$  в некотором смысле с противоположной точки зрения, связанной с анализом результатов, полученных нами ранее для квантовых поправок к проводимости невзаимодействующих электронов на "металлической" стороне М-И перехода из теории возмущений по параметру  $\lambda / l \ll 1$ , где  $l$  - упругая длина свободного пробега. Полученные там формулы для  $\delta\sigma / \sigma_0$  имели вид (см. лекцию 1):

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma} \approx \begin{cases} -\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 - \left(1 - \frac{l}{L_\varphi}\right) & d=3 \\ -\left(\frac{\lambda}{l}\right) \ln(L_\varphi/l) & d=2 \\ \frac{L_\varphi}{l} - 1 & d=1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь  $L_\varphi \equiv \sqrt{D\tau_\varphi}$ , и т.к.  $\tau_\varphi \sim T^{-p}$  и  $p > 0$ , то для  $T \rightarrow 0$  имеем

$$L_\varphi \rightarrow \infty.$$

Тогда из (4.1) очевидно, что для  $d = 1, 2$  квантовые поправки при

$T \rightarrow 0$  расходятся. Из условия  $\delta\sigma / \sigma_0 \sim 1$  в этих случаях можно определить те значения  $L_\varphi$ , которые приводят к локализации. Очевидно, для  $d = 1$  будет  $L_\varphi^c / l \sim 1$  т.е.  $L_{c1} \sim l$  (независимо от  $\lambda$ ), а для  $d = 2$  должно быть  $(\lambda / l) \ln(L_\varphi^c / l) \sim 1$  т.е.  $L_{c2} \sim l \exp(l / \lambda)$ .

Из (1) следует также, что  $L_c$  зависит от микропараметров металла ( $\lambda$  и  $l$ ) и не зависит от температуры (фазовый переход при  $T = 0$ ).

Микроскопический смысл  $L_c$  в рассматриваемом случае аналогичен рассмотренному с диэлектрической стороны М-И перехода. Если  $\varphi_n$  – собственные функции электрон-примесного гамильтониана при данной конфигурации распределения примесей, то  $L_c$  есть характерный размер экспоненциального спада локализованного в точке  $r = 0$  волновой функции, соответствующей уровню энергии  $E_n$  (см. рис.4.3).

В других терминах можно говорить, что  $L_c$  – радиус спада корреляционной функции

$$\langle |\varphi_n(x)|^2 |\varphi_n(x')|^2 \rangle \sim e^{-|x-x'|/L_c}$$

которая является самоусредняющейся величиной, в отличие от случайной функции  $\varphi_n(r)$ .

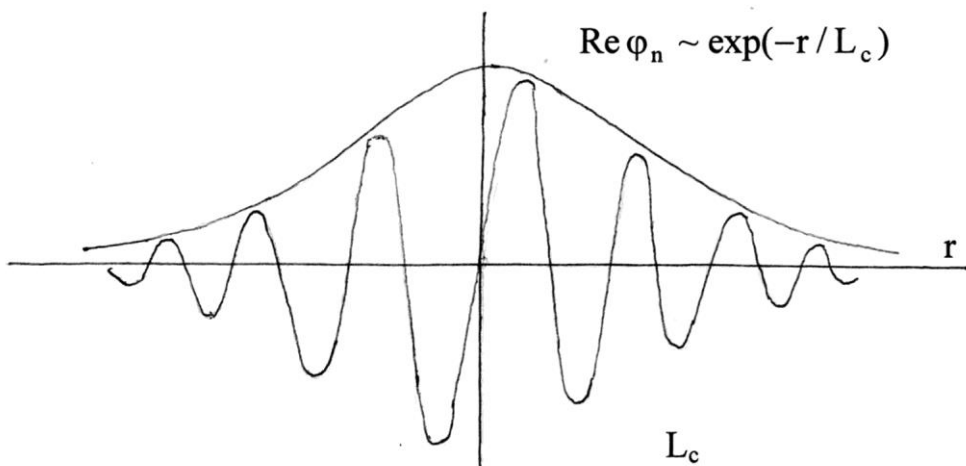


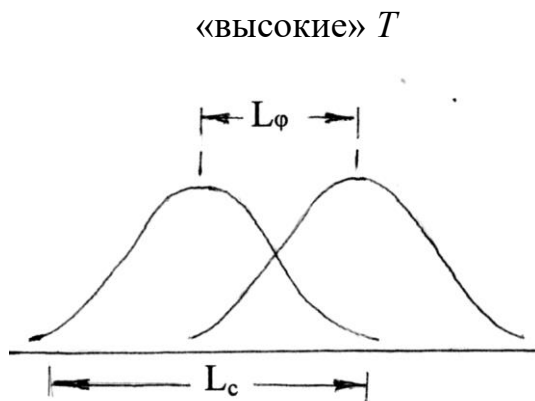
Рис. 4.3.

С макроскопической точки зрения оценки для  $L_c$  в случае  $d = 1,2$  означают при  $T = 0$ , что как только характерный размер образца превышает  $L_c$ , то для  $L \gg L_c$

$$\rho_{1,2} \sim \exp(L/L_c) \quad , \quad (T = 0)$$

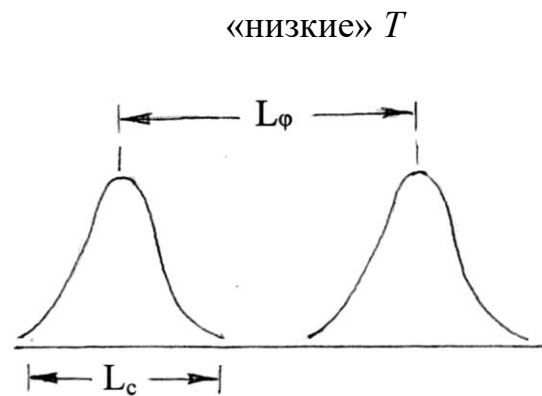
т.е. электросопротивление образца обращается в бесконечность. Если же  $T \neq 0$ , то  $L_\phi$  - конечна, и проводимость даже бесконечного образца ( $d = 1,2$ ) будет конечной за счет механизма либо диффузии по локализованным состояниям (для  $L_\phi \leq L_c$ ) или прыжков по ним (для  $L_\phi \gg L_c$ ). В первом случае (см. рис.4.4.) проводимость при  $T \neq 0$  будет квазиметаллической (т.е. степенным образом зависеть от температуры), и во втором (рис.4.5.) – активационной, т.е. полупроводникового типа (см. лекцию б).

Однако, прежде чем переходить к анализу различных видов активационной проводимости, рассмотрим более подробно соотношения между различными масштабами в металлах с примесями.



Диффузионная проводимость  
квазиметаллическая ( $\sigma \sim T^m$ )  
( $L_\phi \ll L_c$ )

Рис.4.4.



Прыжковая проводимость  
активационная ( $\sigma \sim \exp \alpha/T$ )  
( $L_\phi \gg L_c$ )

Рис.4.5.



## 2. Иерархия длин в неупорядоченном изоляторе.

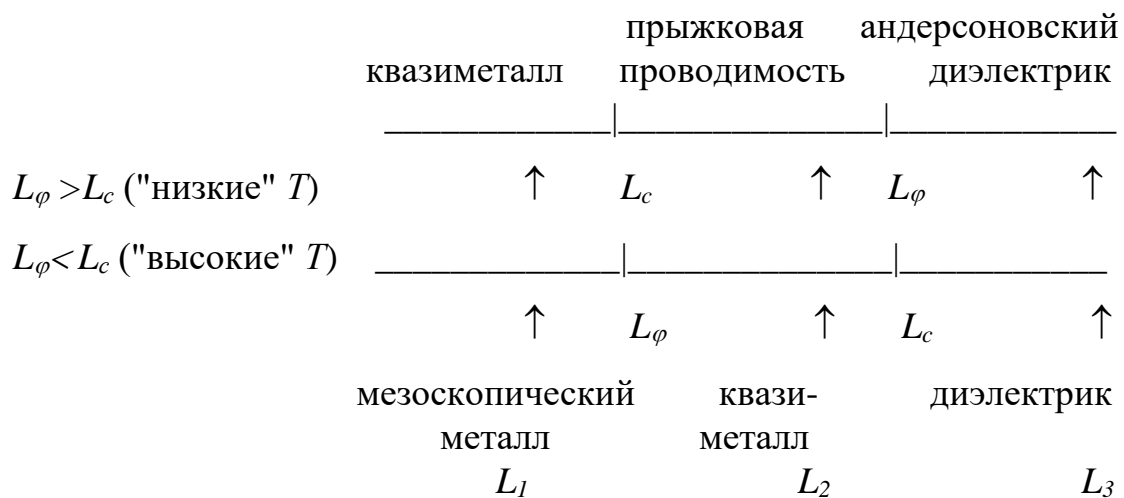
Подведем итог предыдущего рассмотрения. Формально при  $T=0$  конкурируют две длины:  $L$  и  $L_c$ :

$$\text{для } L > L_c \quad \sigma_{1,2} = 0, \quad \sigma_3 = \begin{cases} 0 & (\varepsilon_F < E_c) \\ \sigma_0 & (\varepsilon_F > E_c) \end{cases}$$

для  $L < L_c$   $\sigma_d$  -конечна (квазиметалл)

Если же  $T \neq 0$ , то конкурируют уже три длины:  $L$ ,  $L_c$  и  $L_\varphi$ .

Изобразим, соответственно, две диаграммы:



где  $L_i$  - длина образца ( $i = 1, 2, 3$ ).

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

к лекциям 3 и 4.

1. Объясните различие в методах описания сильного и слабого беспорядка.
2. Что такое порог подвижности?
3. Сформулируйте макроскопический критерий локализации.
4. Какова роль эффектов туннелирования и надбарьерного отражения в проблеме локализации электронов?

5. Оцените величину интеграла перекрытия.
6. Каков физический смысл корреляционной длины фазового перехода металл – диэлектрик в андерсоновском изоляторе?
7. Чем отличаются изоляторы в зонной теории и андерсоновские изоляторы?
8. Что такое квазиметаллическая и активационная проводимость андерсоновского изолятора?

## Лекция 5.

### СКЕЙЛИНГОВАЯ ТЕОРИЯ «СИЛЬНОЙ» ЛОКАЛИЗАЦИИ

Анализ квантовых интерференционных поправок к проводимости образца для  $d = 1, 2, 3$ , проведенный в предыдущей лекции показал, что для  $d = 1, 2$  эти поправки могут стать (при  $T \rightarrow 0$ , когда  $L_\varphi \rightarrow \infty$ ) порядка основного вклада даже при слабом ( $l \gg \lambda$ ) беспорядке. Это качественно соответствует тому, что при  $T = 0$  в случае  $d = 1$  электронные состояния локализованы всегда (теорема Мотта - Туза), для  $d = 2$  - только при  $L_\varphi \rightarrow \infty$ , а в случае  $d = 3$  это возможно только при сильном ( $l \sim \lambda$ ) беспорядке.

Все это очень напоминает теорию фазовых переходов II-го рода, где такой переход запрещен, вообще говоря, для  $d = 1, 2$  и возможен для  $d = 3$ . Соответствующая физическая картина использует понятие корреляционной длины (радиуса корреляции флуктуаций параметра порядка).

Поэтому не было неожиданным перенесение флуктуационной термодинамической теории фазовых переходов II-го рода на поведение кинетической характеристики - проводимости "грязного" образца.

В этой лекции рассмотрим так называемую скейлинговую теорию локализации, предложенную четырьмя авторами в 1979 г. (Абрахамс, Андерсон, Личарделло и Рамакришнан) и известную как работа "банды 4-х". Эта теория фактически представляет разумную интерполяцию между предельными случаями хорошего проводника ( $g(L) \gg 1$ ) и "локализованного" изолятора ( $g(L) \ll 1$ ), где  $g \equiv G / (e^2 / h)$  j – безразмерный кондактанс образца –  $d$ -мерного куба. Она хорошо согласуется с первым приближением - слабыми локализационными поправками к кондактансу хорошего (чистого)

металла; с известными к настоящему времени численными расчетами андерсоновской локализации; с экспериментом для одномерных проволок и рядом аналитических расчетов.

Скейлинговая теория не только качественно объяснила связь между поведением образца в различных предельных случаях (сильного и слабого беспорядка), но и дала ряд новых (к моменту ее появления) предсказаний, которые были затем обнаружены на опыте.

Одно из таких утверждений: " $2d$ -металлы (пленки с толщиной  $d_f \ll L_\phi$ ) в действительности не являются металлами" – начиная с  $R \sim \hbar / e^2 \sim 30$  кОм они переходят в режим сильной локализации. Другое утверждение – предсказание перехода металл-изолятор (М - I) для случая  $d = 3$  (ибо из локализационных поправок он неочевиден - в этом случае они убывают при  $L \rightarrow \infty$ ).

Пусть  $T = 0$ . Рассмотрим кондактанс образца – величину обратную полному сопротивлению для образцов с размерностью  $d = 1, 2, 3$ , у которых все большие размеры одинаковы. Поведение безразмерного кондактанса  $g \equiv G / (e^2 / \hbar)$  при увеличении максимального размера системы  $L$  может быть проанализировано с учетом гипотезы масштабной инвариантности  $g(L)$  аналогично тому, как это делается в теории фазовых переходов II-го рода. Основным вопросом при таком анализе является вопрос о наличии критического размера  $L_c \sim \xi_l$ , "разделяющего" при  $T = 0$  металл и диэлектрик.

Согласно гипотезе скейлинга считается, что  $g$  является единственной величиной, определяющей поведение образца при изменении его размера  $L$ . Это означает, что для произвольного числа  $q \neq 0$

$$g(qL) = f[q, g(L)], \quad (5.1)$$

где  $f$  – некоторая гладкая функция. Соотношение (5.1) можно переписать в дифференциальной форме, для чего положим  $q = 1 + \alpha$

( $\alpha \ll 1$ ) и разложим в ряд по  $\alpha \ll 1$ .

$$g[(1 + \alpha)L] \cong g(L) + \frac{\partial g}{\partial L} \alpha L = f[1 + \alpha, g(L)] = f[1, g(L)] + \left( \frac{\partial f}{\partial q} \right)_{q=1} \alpha ;$$

но  $f[1, g(L)] = g(L)$ , т.е.  $L \frac{\partial g}{\partial L} = \left. \frac{\partial f(g)}{\partial q} \right|_{q=1}$ .

Если обозначить  $\frac{1}{g} \left. \frac{\partial f(g)}{\partial q} \right|_{q=1} \equiv \beta(g)$ , то окончательно получим

$$\frac{L}{g} \cdot \frac{\partial g}{\partial L} = \beta(g) \text{ или}$$

$$\frac{\partial \ln g}{\partial \ln L} = \beta(g), \quad (5.2)$$

которое известно как уравнение Гелл-Манна и Лоу. Таким образом, если  $\beta(g)$  – известна, то  $g(L)$  определяется простым интегрированием. Для выяснения поведения  $g_d(L)$  необходимо знать поведение  $\beta(g_d)$ . Это поведение можно установить, исследуя асимптотики  $\beta(g)$  при  $g \gg 1$  и  $g \ll 1$ .

а) В пределе хорошего проводника ( $g \gg 1$ ) и достаточно больших размерах образца можно ожидать, что выполняется обычный закон Ома, т.е.

$$G(L) \sim \sigma(L)L^{d-2} .$$

Действительно, рассмотрим  $d$ -мерный куб с ребром  $L$ . Тогда

$$G(L) = \frac{I(L)}{V(L)} = \frac{jL^{d-2}}{EL} = \left( \frac{j}{E} \right) L^{d-2} = \sigma L^{d-2} , \quad (5.3)$$

где  $j$  – плотность тока, а  $E$  – напряженность электрического поля. Если  $L$  достаточно велико, то  $\sigma = \sigma_m$  и не зависит от  $L$ . Но с умень-

шением  $L$  появляется зависимость  $\sigma(L)$  и решение уравнения (5.2) становится нетривиальным. Формула (5.3) означает, что

$$\beta[g(L \rightarrow \infty)] = d - 2 = \begin{cases} 1 & d = 3 \\ 0 & d = 2 \\ -1 & d = 1 \end{cases} . \quad (5.4)$$

Полученные ранее (см. лекцию 1) интерференционные поправки к проводимости могут быть использованы для получения следующего приближения к  $\beta(g)$  при  $g \gg 1$ .

В результате можно показать, что первая поправка по  $1/g$  к результатам (5.4) имеет вид

$$\beta(g_d) \approx d - 2 - \alpha_d / g_d , \quad (5.5)$$

где  $g_d = g_d(L)$  и  $\alpha_d \sim 1$  ( $d = 1, 2, 3$ ) .

б) Если  $g$  мало ( $g \ll 1$ ), то это означает локализацию. Тогда должно быть

$$g \sim e^{-L/L_c} . \quad (5.6)$$

Отсюда

$$\beta(g) = \frac{d \ln g}{d \ln L} \approx -\frac{1}{L_c} \cdot \frac{dL}{d \ln L} = -\frac{L}{L_c} = \ln g , \quad (g \ll 1) . \quad (5.7)$$

Так как с ростом  $L$  в режиме локализации ( $g \ll 1$ )  $g \rightarrow 0$ , то  $\ln g \rightarrow \infty$  . Численные расчеты функции  $g(L)$  при конечных  $L$  показывают, что  $\beta(g)$  является не только непрерывной и дифференцируемой, но и монотонно растущей функцией  $L$ . Тогда схематический вид зависимостей  $\beta(g)$  как функции  $\ln g$  можно представить графически как показано на рис. 5.1.

Из этих графиков следуют два важных вывода: а) с ростом  $L$  при  $d = 1, 2$  всегда будет локализация т.к.  $\beta(g_{1,2}) < 0$ , то изображающая точка на кривых  $\beta(g)$  всегда движется по направлению уменьшения  $g$  независимо от начального условия  $g(L_0)$ .

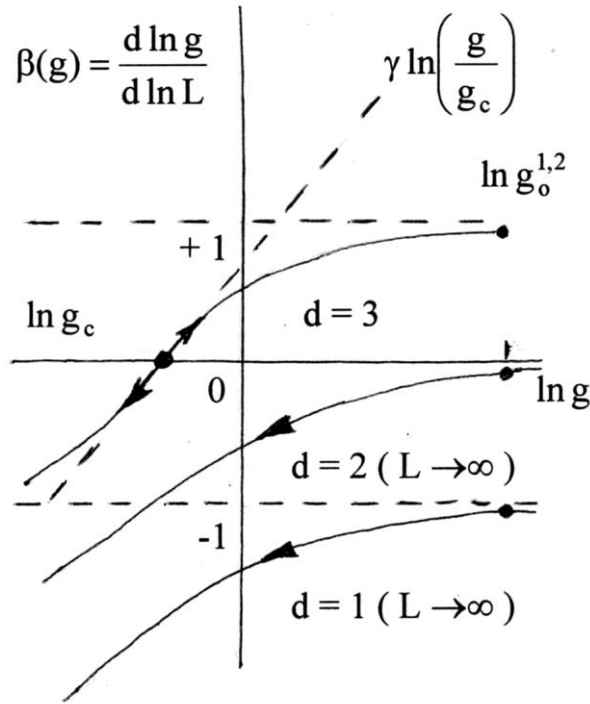


Рис.5.1

б) Для  $d = 3$  ситуация иная: имеется "неподвижная" точка  $g = g_c$ , такая, что  $g_c(L) = g_c(qL)$  для всех  $q$ , т.к.  $\beta(g_c) = 0$  (чего нет для  $d = 1, 2$ ), т.е.  $g_c$  не зависит от  $L$ .

Однако, эта неподвижная точка является неустойчивой. Если  $g_0^+ > g_c$ , то с ростом  $L$  изображающая точка перемещается в сторону роста  $g$ , т.к.  $\beta(g_0^+) > 0$ , и наоборот, для  $g_0^- < g_c$  - в сторону уменьшения  $g$ , т.к.  $\beta(g_0^-) < 0$ . Итак, если

$$\begin{aligned}
 g_0^+ > g_c, & \quad \text{то при } L \rightarrow \infty \text{ - делокализация} \\
 g_0^- < g_c, & \quad \text{то при } L \rightarrow \infty \text{ - локализация} \quad . \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Таким образом, только случай  $d = 3$  обнаруживает переход М-И. Существование перехода обусловлено достаточно малой длиной свободного пробега  $l$  по сравнению с  $\lambda$  - характерной длиной волны электрона на уровне Ферми. Действительно, только для  $(\lambda/l) \sim 1$  интерференционная поправка имеет порядок невозмущенной

проводимости.

Перейдем к анализу поведения  $\beta(g)$  в окрестности перехода М-I и выяснению зависимости корреляционной длины  $\xi_l$  от степени близости  $g$  к  $g_c$ . Сделаем самое простое и, как показывает численный анализ, естественное предположение, что вблизи  $g_c$  можно приближенно считать  $\beta(g)$  линейной функцией  $g$ :

$$\beta(g) \approx \gamma[(g - g_c)/g_c] \approx \gamma(g/g_c - 1) \approx \gamma \ln(g/g_c). \quad (5.9)$$

Последнее равенство в (5.9) есть следствие предыдущего при условии  $(g - g_c) \ll g$ . Действительно,  $\ln(g/g_c) = \ln[(g - g_c + g_c)/g_c] =$

$$= \ln\left(1 + \frac{g - g_c}{g_c}\right) \approx (g - g_c)/g_c \ll 1$$

С помощью предположения (5.9) легко решается уравнение (5.2), которое для этого удобно переписать в виде

$$\frac{dx}{d \ln L} = \gamma x \quad \text{или} \quad x \equiv \ln(g/g_c). \quad (5.10)$$

Интегрирование (5.10) с начальным условием  $g = g_c$  при  $L = L_0$  дает  $x = x_0 (L/L_0)^\gamma$ , т.е.

$$g(L) = g_c (g_0/g_c)^{(L/L_0)^\gamma}. \quad (5.11)$$

Полученная нами формула (5.11) полностью соответствует результатам, сформулированным ранее соотношениями (5.8). Если  $g > g_c$ , то  $g(L)$  растет с ростом  $L$ , если  $g_0 < g_c$ , то — уменьшается. Наконец, для  $g_0 = g_c$  (начальное условие — в неподвижной точке)  $g(L) = g_c$  независимо от  $L$ . Численные расчеты показывают, что  $\gamma \sim 1$  и  $g_c \approx 2 \div 3$ .

Если  $g_0^+ \rightarrow g_c$ , то при любом конечном (но достаточно большом)  $L$ ,  $\sigma \sim g_c L^{2-d} \sim g_c/L \rightarrow 0$  в макроскопическом пределе (т.е. отсутствует скачок  $\sigma_{min}$ ). Согласно этой простой теории (необходимым условием использования которой является однородность на



соответствующем масштабе, а это  $l$  – для микробеспорядка и  $a$  – размер гранул – для макробеспорядка) все материалы "укладываются" на одну и ту же универсальную зависимость  $\beta(g)$  и различаются между собой их кондактансом  $g$  на некотором микромасштабе  $L$ , в качестве которого для "примесного" материала выбирается упругая длина свободного пробега  $l$ . Все материалы, для которых  $g > g_c$  при  $L \rightarrow \infty$  являются проводниками, а те, у которых  $g < g_c$  – изоляторами. Корреляционной длиной (или длиной локализации  $\xi_l$ ), как и в теории фазовых переходов II-го рода, является тот масштаб, начиная с которого начинают выполняться макроскопические законы, т.е.  $G \sim \sigma(L)l^{d-2}$

где  $\sigma(\xi_l) \sim \sigma_{macro} \equiv \sigma(L \rightarrow \infty) \equiv \sigma_\infty$ ; тогда  $g(\xi_l) \approx \frac{e^2}{h} \cdot \frac{\sigma_\infty}{\xi}$ .

Вернемся теперь к результату (5.11) и воспользуемся формулой (5.9).

Тогда

$$\frac{\ln[g(\xi_l)/g_c]}{\ln(|g_0 - g_c|/g_c)} = \left(\frac{\xi_l}{L_0}\right)^\gamma$$

и окончательно

$$\xi_l \sim L_0 \frac{const}{\varepsilon^{1/\gamma}}, \quad (5.12)$$

## 47

где  $\varepsilon \equiv |g_0 - g_c|/g_c \ll 1$  есть мера близости образца к точке фазового перехода М-I. Как и следовало ожидать из физики фазовых переходов II-го рода, корреляционная длина  $\xi_l \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и "критический индекс"  $\xi_l$  есть  $1/\gamma$ . Заметим, что  $\xi_l$  имеет различный физический смысл со стороны изолятора ( $g_0 < g_c$ ) и со стороны

металла ( $g_0 > g_c$ ). В первом случае - это радиус локализации волновой функции электрона, а во втором - это характерный масштаб, начиная с которого проводимость становится макроскопической т.е. перестает зависеть от  $L$  и выполняется закон Ома  $\sigma = \sigma_\infty$ .

Отметим, что величина  $\varepsilon$  является характеристикой образца, которая может изменяться, например, за счет изменения концентрации примесей, а, следовательно, величины  $L_0 \sim l$ , или за счет деформирования образца, при котором изменяется  $p_F$ , а, следовательно, и плотность электронных состояний на уровне Ферми.

Краткий итог результатов скейлинговой теории для трехмерных образцов в металлическом режиме вблизи перехода М-И дается следующим рисунком 5.2, на котором изображены два графика  $\sigma(L)$ . Верхний дает поведение  $\sigma(L)$  для случая, когда  $L_0$  выбрано несколько выше точки перехода. Нижний - когда  $L$  прямо в точке перехода. В обоих случаях  $\sigma(L)$  с ростом  $L$  ведет себя подобно  $1/L$ , однако для  $L > \xi_l$  верхняя кривая выходит на (конечную) макропроводимость  $\sigma_\infty \sim A(e^2/\hbar)/\xi_l$ , тогда как для нижней кривой  $\xi \rightarrow 0$  и  $\sigma_\infty = 0$ .

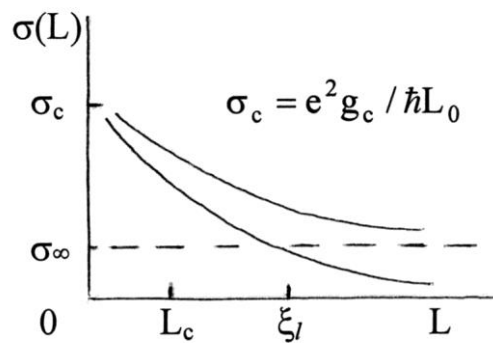


Рис.5.2.

Наконец, рассмотрим вопрос о проводимости в металлической фазе при  $T > 0$  (проводимость в диэлектрической фазе для  $T > 0$

будет предметом следующей лекции). Здесь надо различать два случая:

а)  $l_{in}(T) \equiv (D\tau_{in})^{1/2} \gg \xi$ , что соответствует достаточно низким температурам и режиму "нормальной" диффузии ( $l_{in} \gg \xi$ ), когда на характерной неупругой длине  $l_{in}$  образец фактически является металлом. В этом случае приведенный выше результат для  $\sigma_\infty$  не изменится, то есть в основном приближении

$$\sigma(T) \approx A(e^2 / \hbar) / \xi \quad (5.13)$$

небольшая температурная поправка все же имеется (смотрите следующий случай).

б)  $l_{in}(T) \ll \xi$ , что соответствует достаточно высоким температурам и режиму так называемой "аномальной" диффузии, когда связь между  $l_{in}$  и  $\tau_{in}$  выглядит не как в предыдущем случае, а иначе из-за того, что теперь коэффициент диффузии электронов зависит от величины  $L$ , т.е.  $D = D_L$ , что физически связано с тем, что на этих масштабах металлическая и диэлектрическая фазы неразличимы ввиду того, что аномально велики локальные флуктуации проводимости: величина  $\sigma(L)$  на этих масштабах не является самоусредняющейся (см. лекцию 8).

Воспользуемся соотношением Эйнштейна  $\sigma = n(\varepsilon)De^2$  для того, чтобы связать  $D$  и  $D(L)$ . Тогда  $\sigma(L) / D(L) \approx \sigma(\xi) / D$ .

Но вследствие практического постоянства  $g(L)$  для  $L \leq \xi$  имеем  $\sigma(L)L^{d-2} \sim \sigma_0 \xi^{d-2}$ , откуда получаем

$$D(L) \sim D_0 (\xi / L)^{d-2} . \quad (5.14)$$

Перейдем к выяснению связи между  $l_{in}$  и  $\tau_{in}$  в случае аномальной диффузии ( $L \ll \xi$ ), когда  $L^2 = D(L)t$ , т.е.  $l_{in}^2 = D(l_{in})t_{in}$  и  $l_{in}^2 = D_0 \tau_{in} (\xi / l_{in})^{d-2}$ , так что,

$$l_{in}^d = D_0 \tau_{in} \xi^{d-2}, \quad (5.15)$$

что и дает искомую связь.

Трактуя теперь  $D[l_{in}(T)]$  как  $D(T)$  (и аналогично для  $\sigma(T)$  с учетом  $\sigma(T) \sim (\sigma_0/D_0)D(T)$ ) получаем

$$\sigma(T) \sim \sigma_0 \left[ \frac{\xi}{l_{in}(T)} \right]^{d-2}. \quad (5.16)$$

Рассмотрим случай  $d = 3$  и учтем, что  $\sigma_0 \sim \sigma(\xi) \sim e^2 / \hbar \xi$ .

Тогда

$$\sigma(T) \sim \frac{e^2}{\hbar} \cdot \frac{B}{l_{in}(T)} \quad (l_{in} \ll \xi). \quad (5.17)$$

Объединяя формулы (5.13) и (5.17) получаем (при произвольном соотношении между  $l_{in}(T)$  и  $\xi$ ) простую интерполяционную формулу

$$\sigma(T) \sim \frac{e^2}{\hbar} \cdot \left[ \frac{A}{\xi} + \frac{B}{l_{in}(T)} \right]. \quad (5.18)$$

Ее особенностью является наличие отрицательного температурного коэффициента сопротивления (ТКС) - оно падает с ростом  $T$  за счет

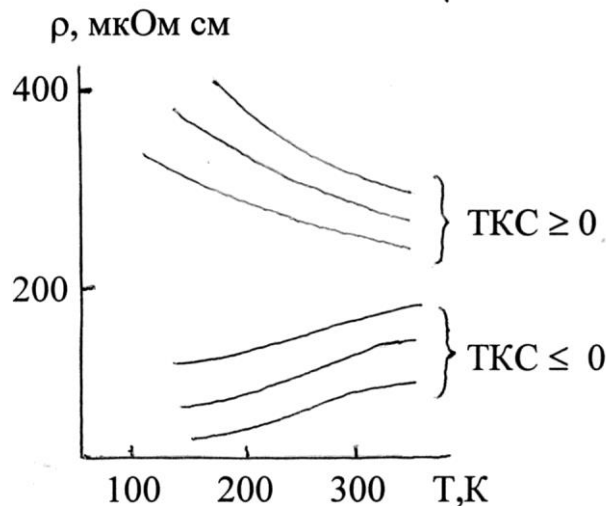


Рис.5.3

второго слагаемого в формуле (5.18), что соответствует эмпирически установленному для более чем сотни сплавов правилу Муиджи (Moоij, 1973): в достаточно грязных (для которых  $\rho \geq 10^{-4} \hat{h} \cdot \tilde{n} \hat{i}$ ) металлических образцах обычно наблюдается отрицательный ТКС.

На рисунке 5.3. (взятом из работы R.C. Dynes et al., (1985)) приведены зависимости  $\rho(T)$  для соединения  $\text{LuRh}_4\text{B}_4$  по мере роста дозы облучения (которая больше для верхней группы кривых).

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте основные положения и результаты флуктуационной теории фазовых переходов II – го рода.
2. Что является параметром порядка скейлинговой теории сильной локализации?
3. Что такое «неподвижная точка» масштабных преобразований?
4. Что такое аномальная диффузия?

## Лекция 6.

### ПРЫЖКОВАЯ ПРОВОДИМОСТЬ НЕУПОРЯДОЧЕННОГО (АНДЕРСОНОВСКОГО) ИЗОЛЯТОРА

В этом разделе мы рассмотрим температурную зависимость проводимости неупорядоченных (исходно металлических) образцов, которые при  $T = 0$  за счет андерсоновской локализации являются изоляторами, т.е. для которых  $\varepsilon_F < \varepsilon_c$ . Отличная от нуля проводимость таких систем является термоактивированной и может осуществляться либо зонным образом (т.е. по делокализованным состояниям), либо прыжками (по локализованным состояниям). Представления о прыжковой проводимости первоначально возникли в теории слабо легированных полупроводников.

При высоких температурах  $T$  полупроводники обладают собственной электропроводностью, связанной с термической активацией электронов из валентной зоны в зону проводимости. Так как концентрация электронов в валентной зоне  $n_s \sim \exp(-E_g/2T)$  в этом случае экспоненциально зависит от температуры, то такая "зонная" проводимость сильно уменьшается при понижении  $T$  ввиду достаточно большой величины энергии активации  $E_g/2$ . При дальнейшем понижении температуры (и т.к. уровень Ферми в полупроводниках находится в середине энергетической щели между валентной зоной и зоной проводимости) число "зонных" носителей падает настолько, что проводимость полупроводника начинает определяться носителями, поставляемыми примесями, и называется примесной.

По мере дальнейшего понижения  $T$  происходит смена механизма самой примесной проводимости.

Сначала она является, как и собственная проводимость полупроводника, зонной, только поставщиком электронов является теперь не валентная зона, а примеси (с характерной энергией активации  $\varepsilon_i \ll E_g$ ). Однако, при дальнейшем снижении  $T$  эта проводимость также начинает "вымерзать". И наступает момент, когда наибольшую роль в электропроводности начинают играть прыжки электронов непосредственно по примесям, без активации в зону. Такая проводимость называется прыжковой.

Прыжковому механизму электропроводности соответствует очень малая подвижность электронов, т.к. прыжки электронов связаны со слабым перекрытием хвостов волновых функций соседних примесных центров. Несмотря на это, прыжковая проводимость может выигрывать в конкуренции с зонной, т.к. в прыжковой проводимости могут принимать участия все локализованные электроны, а в зонной - экспоненциально малое число свободных электронов.

Напомним основное отличие полупроводника от металла – в последнем основными носителями тока являются электроны с энергией  $\varepsilon_F$ , а в полупроводнике – возбужденные электроны (т.к. уровень Ферми расположен посередине запрещенной зоны).

Термоактивированная прыжковая проводимость по локализованным в примесном "металле" состояниям может осуществляться только с помощью фононов в силу неизбежного рассогласования ("сбоя") энергетических уровней между локализованными состояниями.

Последние характеризуются двумя характерными длинами:

$R_0$  – среднее расстояние между центрами локализации и  $\xi_l$  – средний радиус локализации, т.е. характерный размер волновой функции локализованного состояния. В зависимости от соотношения между  $R_0$  и  $\xi_l$  возможны два различных предельных случая:

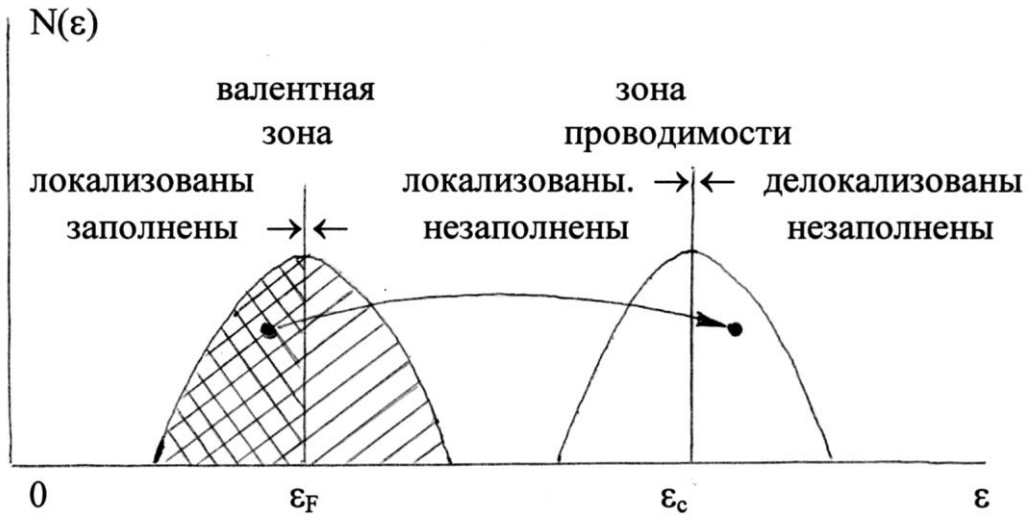


Рис.6.1.  $\xi_l < R_0$  – сильная локализация

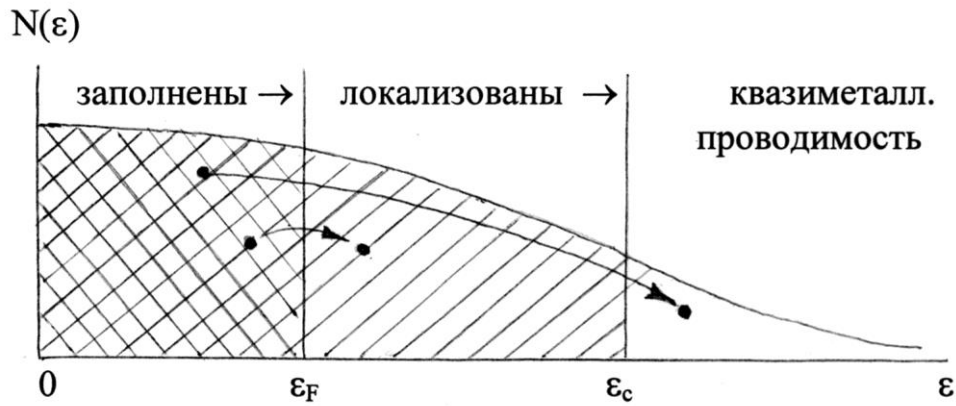


Рис.6.2.  $\xi_l > R_0$  – слабая локализация

а)  $\xi_l \leq R$  – сильная локализация. Вся валентная зона локализована.  $\varepsilon_c$  – в зоне проводимости. Возможна лишь активированная проводимость (см. рис.6.1).

б)  $\xi_l \geq R$  – слабая локализация. Часть валентной зоны локализована.  $\varepsilon_c$  – в этой же зоне. Возможна квазиметаллическая (высокие температуры  $T$ ) проводимость или прыжковая проводимость с так называемой переменной длиной прыжка (низкие  $T$ ) (см. рис.6.2).

Получим сначала общее выражение для прыжковой проводимости по локализованным состояниям со средним расстоянием между



центрами локализации  $R \equiv R_{ij}$ , радиусом локализации  $\xi_l$ , и средним расстоянием между энергетическими уровнями  $i$  и  $j$ , равным  $\Delta\varepsilon_{ij} = |\varepsilon_i - \varepsilon_j|$ . Пусть  $E$  - внешнее электрическое поле. Плотность тока может быть представлена известным соотношением  $j = nev_h$ , где  $n \approx N(\varepsilon_F)T$  - среднее число электронов, участвующих в проводимости,  $v_h$  - средняя скорость прыжков. Последняя определяется разностью вероятностей прыжков на расстояние  $R$  вдоль и против электрического поля:

$$v_h = (w^+ - w^-) \cdot R,$$

где  $w^\pm = v_{ph} I \cdot N_{ph}^\pm$ . Здесь  $v_{ph}$  - характерная фоновая частота ( $v_{ph} \sim \omega_{\tilde{A}}$ ),  $I \sim \exp(-R/\xi_l)$  - величина интеграла перекрытия, а  $N_{ph}^\pm = [\exp(\hbar\omega_{ij}^\pm/T) - 1]^{-1}$  - равновесное число фононов со средней энергией  $\hbar\omega_{ij} = |\varepsilon_i - \varepsilon_j| \pm eER$ , где второе слагаемое равно дополнительной энергии, приобретаемой электроном в поле  $E$  при перемещении на расстояние  $R$ . Если мы рассматриваем случай достаточно низких температур (точнее  $\hbar\omega_{ij} \gg T$ ), то  $N_{ph}^\pm \sim \exp(-\omega_{ij}^\pm/T)$  т.е. сводится к больцмановскому распределению.

Тогда для плотности тока получаем

$$j = N(\varepsilon_F)(T)eRv_{ph} \exp(R/\xi_l) \exp(-\Delta\varepsilon_{ij}/T) 2sh(eER/T). \quad (6.1)$$

Отсюда легко получается выражение для нелинейной (зависящей от поля  $E$ ) проводимости  $\sigma(E)$ , так как, по определению,  $J = \sigma(E)E$ . В слабых полях (для  $eER/T \ll 1$ ) можно считать, что  $shx \approx x$  и для линейной электропроводности имеем

$$\sigma_{идиал.} = 2N(\varepsilon_F)e^2R^2v_{ph} \exp\left(-\frac{R}{\xi_l} - \frac{\Delta\varepsilon_{ij}}{T}\right). \quad (6.2)$$

Действительно, среднее расстояние между уровнями  $\Delta\varepsilon_{ij}$  для электрона в объеме  $R^d$  ( $d$  – размерность пространства) связано с величиной числа уровней в единице объема, приходящихся на единичный интервал энергий соотношением  $N(\varepsilon_F) \sim \frac{1}{R^d \Delta\varepsilon}$ . Тогда

$\Delta\varepsilon_{ij} \sim \frac{1}{N(\varepsilon_F)R^d}$ . В зависимости от соотношения между  $\xi_l$  и  $R$ ,

возможны два разных предельных типа температурной зависимости  $\sigma_{прыж.}(T)$ .

В случае сильной локализации  $\xi_l \leq R_0$  (и достаточно высоких температур) реализуется случай  $R \sim R_0$ , т.е. прыжки на большие длины экспоненциально маловероятны. Тогда

$$\sigma_{прыж.} = \sigma_0 \exp(-R_0 / \xi_l) \exp(-\varepsilon_3 / T), \quad (6.3)$$

где  $\varepsilon_3 \equiv [N(\varepsilon_F)R_0^d]^{-1}$  – среднее расстояние между уровнями в объеме  $\sim R_0^d$ . Видно, что энергия активации прыжковой проводимости в этом случае сильно зависит от  $R_0$ , то есть от концентрации примесей, а также от плотности электронных состояний на уровне Ферми. В случае слабой локализации  $\xi_l \gg R_0$  (и достаточно низких температур) характерные энергии фононов малы, что приводит к прыжкам лишь

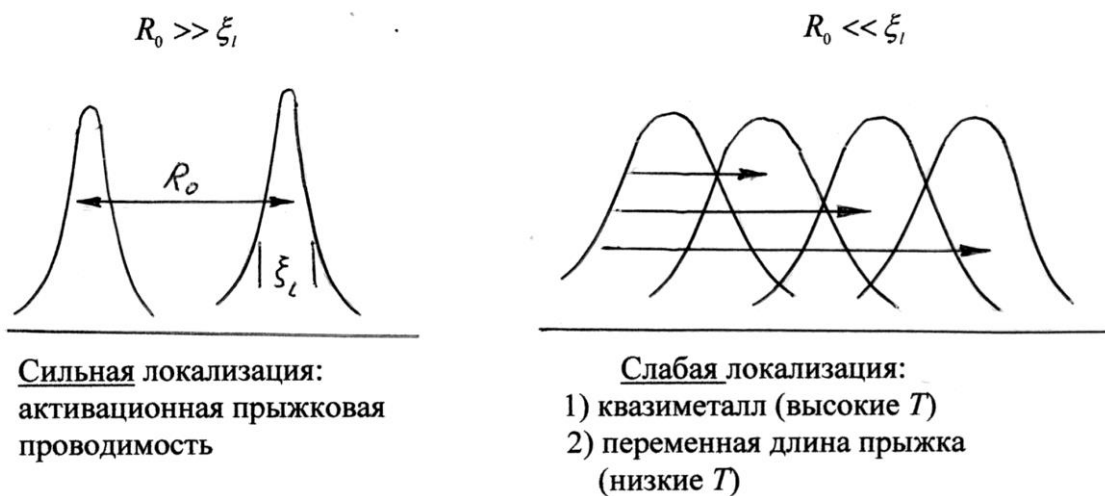


Рис. 6.3

между близкими по энергии уровнями, а это значит, что соответствующие расстояния между центрами локализации могут быть достаточно велики (рис. 6.3). Более того, это означает, что средняя длина прыжка  $R$  начинает зависеть от температуры – с ее понижением реализуется прыжковая проводимость с переменной длиной прыжка. Получим теперь выражение для  $\sigma_{прыж.}(T)$  в этом случае. Для этого удобно формулу (6.2) записать в виде

$$\sigma_{идеал.} = \sigma_0 \exp[-\varphi(R)],$$

где  $\sigma_0 \equiv 2N(o)(eR)^2 v_{ph}$ , а  $\varphi(R) \equiv \frac{R}{\xi_l} + \frac{1}{TN(0)R^d}$ .

Функция  $\varphi(R)$  описывает конкуренцию двух, взаимнопротивоположных по влиянию на вероятность прыжка, тенденций: ослабление перекрытия волновых функций с ростом  $R$  (первое слагаемое) и уменьшение "сбоя уровней" локализованных состояний с ростом  $R$  (второе слагаемое). Очевидно, что в этих условиях имеется оптимальная длина прыжка  $R^*(T)$  при которой вероятность  $W(R^*)$  прыжка максимальна. На расстояниях  $R \ll R^*$  (см. рис. 6.4) вероятность прыжка мала из-за того, что сбой уровней велик, а для  $R \gg R^*$  ованных состояний. Очевидно, что  $R^*$  определится из условия :

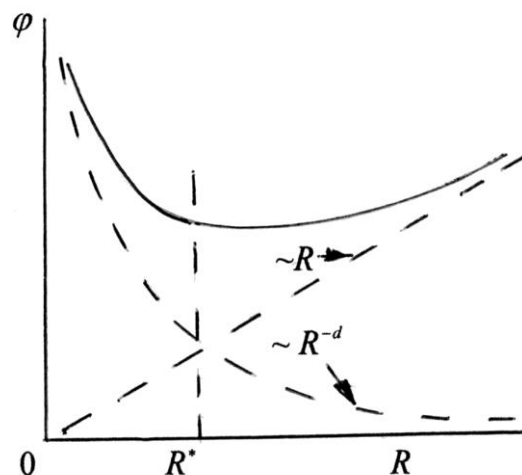


Рис.6.4

$$\frac{d\varphi}{dR}\Big|_{R=R^*} = 0 \quad \text{откуда}$$

$$R^* = [\xi_l / TN(0)]^{1/(d+1)} . \quad (6.4)$$

Тогда удобно записать

$$\varphi(R^*) = R^* / \xi_l = [T \xi_l^d N(0)]^{-1/(d+1)} \equiv (T_0 / T)^{1/(d+1)} ,$$

где  $T = [\xi_l^d N(0)]^{-1}$  – некоторая характерная (зависящая от  $\xi_l$  и  $N(0)$ ) температура. В этих терминах для прыжковой проводимости имеем

$$\sigma_{\text{ид}} = \sigma_0 \exp \left[ - \left( \frac{T_0}{T} \right)^{1/d+1} \right] . \quad (6.5)$$

Выражение (6.4) показывает, что длина прыжка  $R$  растет с понижением температуры, что физически связано с уменьшением характерной энергии тепловых фононов, а последнее требует уменьшения рассогласования уровней локализованных состояний, участвующих в прыжке. В трехмерном случае ( $d = 3$ )

$$\sigma_{\text{ид}} \sim \exp \left[ - (T_0 / T)^{1/4} \right] ,$$

что часто наблюдается на опыте.

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какова роль фононов в реализации прыжковой проводимости андерсоновского диэлектрика?
2. Два режима прыжковой проводимости.
3. Как оценить среднее расстояние между уровнями электрона локализованного в объеме  $R^d$ ?
4. Конкуренцией каких эффектов определяется средняя длина прыжка для случая слабой локализации?

## Лекция 7

### ПЕРКОЛЯЦИОННАЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ МАКРОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕД (ДИСПЕРСНЫХ КОМПОЗИТОВ).

В этой лекции мы переходим к рассмотрению электропроводности макроскопически неоднородных сред. Типичным примером таких сред являются гранулированные металлы, представляющие собой дисперсные композиты, состоящие из металлических гранул размерами порядка  $10 \div 100 \text{ \AA}$ , вкрапленных в диэлектрическую матрицу. Первоначально такие материалы, известные как керметы, использовались в виде резисторов из-за их высокого удельного электросопротивления и низкого ТКС (температурного коэффициента сопротивления). В последние годы интерес к таким композитам все время растет ввиду наличия у них ряда уникальных физических свойств, в том числе и электропроводящих.

В гранулированном металле, в зависимости от концентрации металлической фазы, могут реализовываться три качественно различных структурных состояния: 1) металлический режим, когда концентрация металлической фазы  $p$  достаточно велика ( $p \leq 1$ ), так что металлические гранулы касаются друг друга и формируют металлический континуум с диэлектрическими включениями; 2) диэлектрическое состояние, когда уже металлические включения встречаются редко, т.е.  $p \ll 1$ ; 3) переходной режим, когда концентрация металлических гранул находится вблизи критической концентрации  $p_c$ , так что по электросопротивлению на постоянном токе композит находится вблизи перехода металл-

диэлектрик (М-И). Если в первых двух случаях отклик композита на внешнее постоянное электрическое поле может быть изучен в приближении "эффективной среды", которое рассматривал еще Максвелл, то исследование переходного режима ( $p \approx p_c$ ) потребовало введения новых представлений, составляющих основу так называемой "теории перколяции". Термин "перколяция" является "калькой" английского слова percolation (просачивание) и впервые был использован в 1957 году в связи с изучением математических моделей, описывающих протекание жидкости по случайному лабиринту. Применение теории перколяции к изучению электропроводности дисперсных композитов дало возможность выйти за пределы концепции эффективной среды и позволило корректно описать критическое поведение композитов в некоторой (небольшой по концентрации  $p$ ) окрестности М-И перехода в классических терминах (в отличие от андерсоновской теории М-И перехода при наличии микробеспорядка, которая является сугубо квантовой).

Обратимся теперь к постановке задачи об электропроводности в теории перколяции на примере так называемой "задачи связей" (bond problem) на квадратной решетке (смотри рис. 7.1). Предположим, что каждая связь с сопротивлением  $r$  между узлами решетки может быть либо целой ( $r = 1$ ), либо разорванной ( $r = \infty$ ). Принимается, что вероятность того, что произвольная связь цела, есть  $p$  и не зависит от сосояния других связей. Тогда относительная концентрация целых связей в решетке есть  $p$ , а доля разорванных  $1 - p$ .

Картина распределения целых и разорванных связей фиксирована и во времени не изменяется. Напряжение подводится к плоским металлическим контактам (рис.7.1) на верхней и нижней гранях металлической сетки. Ее эффективная электропроводность  $\sigma(p)$  отлична от нуля только для  $p > p_c$ , где  $p_c$  - порог протекания.

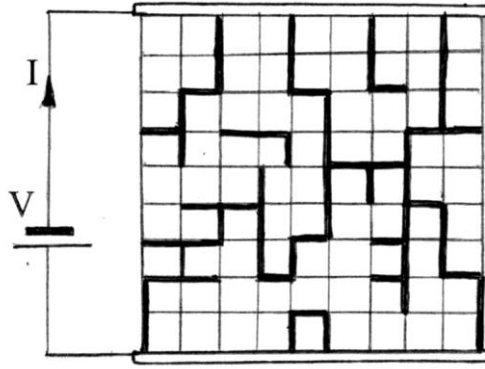


Рис. 7.1.

В рассматриваемом случае  $p_c = 1/2$  (величина  $p_c$  для различных решеток существенно определяется как типом решетки (квадратная, треугольная, гексагональная), так и размерностью пространства  $d$ ). Согласно численным расчетам зависимость  $\sigma(p)$  вблизи  $p = p_c$  имеет вид

$$\sigma(p) \sim (p - p_c)^t, \quad (7.1)$$

где показатель степени  $t$  – так называемый "критический индекс" проводимости. Численные расчеты для квадратной решетки дают значения  $t \approx 1,3$ . Существенно, что в отличие от величины  $p_c$ , величина  $t$  уже не зависит от типа решетки, а определяется лишь размерностью пространства  $d$  (для куба  $t \approx 1,7$ ). Такая "универсальность" показателя  $t$  фактически связана с геометрическими аспектами задачи о перколяции. Чтобы пояснить эту связь подробнее, введем представление об  $S$ -кластере как о связном множестве  $S$  целых связей ( $0 < S < \infty$ ). В принципе, при любой заданной величине концентрации целых связей  $0 < p < 1$  в бесконечной решетке будут существовать кластеры всех размеров, однако вероятность найти  $S$ -кластер при  $p = \text{const}$  существенно зависит как от  $S$ , так и от  $p$ . Очевидно, что с ростом  $p$  будет расти и величина среднего числа связей в типичном (наиболее вероятном при данном  $p$ ) кластере  $S(p)$ .

На языке кластеров динамика появления протекания с ростом  $p$  выглядит так. При малых  $p$  все кластеры невелики. Однако, по мере приближения  $p$  к  $p_c$  отдельные кластеры соединяются, и средний размер кластеров растет. В точке  $p = p_c$  впервые возникает бесконечный кластер (БК) целых связей, т. е. отличная от нуля проводимость перколяционной сетки. Этот бесконечный кластер напоминает собой случайную сетку и пронизывает собой все решеточное пространство. В "порах" этого кластера размещаются конечные изолированные  $S$ -кластеры (рис.7.2). Количественной характеристикой БК является его мощность  $P_\infty$ , равная отношению числа (целых) связей в БК к полному числу целых связей в решетке, то есть, в других терминах, о  $P_\infty(p)$  можно говорить как о "вероятности протекания". Очевидно, что  $P_\infty(p)$  являе монотонно растущей функцией  $p$ , т.к. по мере роста  $p$  в сторону удалени порога

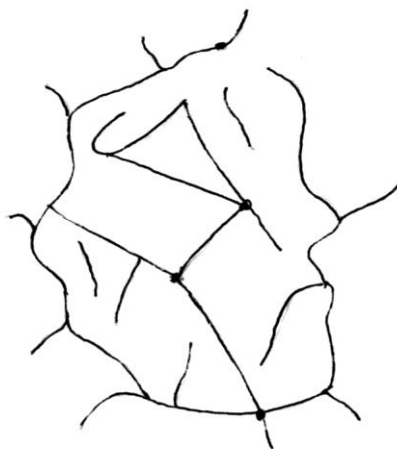


Рис. 7.2

протекания, к БК присоединяются постепенно конечные кластеры, и он из очень редкого становится все более густым и разветвленным. Среднее число его разорванных связей в порах БК  $\bar{S}(p)$  постепенно убывает. Соответственно, убывает среднее число связей в тех кластерах, которые остаются изолированными.

Численные расчеты показывают, что вблизи порога протекания



$$P_\infty \sim (p - p_c)^\beta, \quad (7.2)$$

где показатель  $\beta$ , как и ранее индекс  $t$  в формуле (6.1), является универсальным ( $\beta_2 \approx 0,14$ ,  $\beta_3 \approx 0,40$ ). Важной геометрической характеристикой перколяционной сетки является средний размер  $\xi_p$  типичного  $S$ -кластера, который называется корреляционной длиной. Из предыдущего рассмотрения следует, что величина  $\xi_p$  растет при  $p \rightarrow p_c$  (см. рис.7.3). Из численных расчетов следует, что вблизи  $p = p_c$  имеем

$$\xi_p \sim |p - p_c|^{-\nu}, \quad (7.3)$$

где новый критический индекс также является универсальным ( $\nu_2 = 3/4$ ,  $\nu_3 \approx 0,82$ ). Для наглядности на рис.7.3 изображены схематически зависимости величин  $\sigma(p)$ ,  $P_\infty(p)$  и  $\xi_p$ , соответствующие формулам (7.1.-7.3).

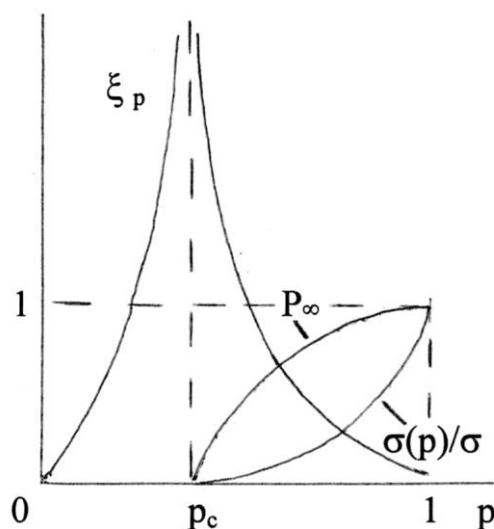


Рис.7.3.

Можно ли выразить "протекательный" индекс  $t$  через геометрические индексы  $\beta$  и  $\nu$ ? Оказывается, что точные соотношения такого типа, повидимому, отсутствуют. Однако, приближенно такую связь установить можно, пользуясь так называемой моделью

"одножильной" сетки (или NLB - моделью). Мы рассмотрим эту модель позднее, а пока обратимся к вопросу о причине универсальности показателей  $t$ ,  $\beta$  и  $\nu$ . Она следует из так называемого геометрического самоподобия БК, которое количественно описывается скейлинговым (степенным) соотношением

$$M_{\infty}(L) \sim L^D, \quad (7.4)$$

где  $M_{\infty}(L)$ -число принадлежащих БК связей в объеме  $L^D$ ,  $L \ll \xi_p$ , где  $L$  – произвольная длина, а  $D$  – так называемая фрактальная размерность БК. Величина  $D$  также является универсальной и может быть определена по формуле (7.4) из машинных расчетов или экспериментально. Визуально самоподобие БК, описываемое формулой (7.4), проявляется в том, что геометрическая микроструктура БК воспроизводится и в более крупном масштабе. Иными словами, можно считать, что фотографии двух частей БК с размерами  $L_1$  и  $L_2$  практически совпадут, если масштаб одной из них изменить в  $(L_1/L_2)^D$  раз (но только для  $L \ll \xi_p$ ). Геометрические объекты такого типа принято называть фракталами. Они используются для количественного описания (на языке фрактальной размерности  $D$ ) нерегулярных, внешне "хаотичных", объектов с "дырочной" структурой. Последняя проявляется в том, что их плотность зависит от величины  $L$  (тогда как для однородных объектов, например регулярной сетки, плотность постоянна и не зависит от масштаба измерения). Так, следствием формулы (7.4) является вывод о том, что для  $L \ll \xi_p$  плотность БК есть

$$\rho_{\infty} = M_{\infty}(L)/L^d \sim L^{D-d},$$

то есть она зависит от  $L$ , и, ввиду того, что  $D < d$ , убывает с ростом  $L$ . Оказывается, что для  $L \gg \xi_p$  масса БК перестает зависеть от  $L$ , а соотношение (7.4) заменяется формулой

$$M_{\infty}(p, L) \sim (L/\xi_p)^d \xi^D \quad (7.5)$$

так, что плотность БК  $\rho_{\infty} \sim M_{\infty}/L^d \sim \xi^{D-d}$  уже не зависит от его размера (а зависит только от величины  $p$ ). Итак, на масштабах  $L \ll \xi_p$  БК является самоподобным (фрактальным) с индексом  $D$ , а для  $L \gg \xi_p$  – однородным. Степенные зависимости (7.1-7.3) являются следствием описанной ранее фрактальной природы перколяционной сетки. В частности, замечая, что для  $L \gg \xi_p$  имеем  $\rho_{\infty}(p) = P_{\infty}(p)$ , а из формул (7.2) и (7.3) следует, что  $P_{\infty} \sim \xi^{-(\beta/\nu)}$ , приходим к важному соотношению

$$D = d - \beta/\nu, \quad (7.6)$$

которое связывает фрактальную размерность перколяционной сетки ранее введенными индексами  $\beta$  и  $\nu$ . Итак, мы рассмотрели поведение плотности  $P_{\infty}$  и корреляционной длины  $\xi_p$  для БК. Однако для вычисления индекса проводимости  $t$  (формула 7.1) этих сведений оказывается недостаточно. Дело в том, что в электропроводности (на постоянном токе) участвуют отнюдь не все связи, принадлежащие БК. Действительно, из расчетов следует (см. рис.7.3) что индекс  $t$  намного больше  $\beta$ . Это значит, что подавляющая часть БК не проводит ток. Отсюда следует легко проверяемый в машинных расчетах вывод о том, что основная масса БК (формула 7.4) сосредоточена в цепочках связей, которые заканчиваются тупиками (так называемые "мертвые концы"). Эти цепочки дают вклад в  $P_{\infty}(p)$ , но не дают вклада в  $\sigma(p)$ .

В отличие от них, связи, проводящие постоянный ток, принадлежат так называемому "скелету" БК. Сам скелет БК также имеет достаточно сложную структуру. Самым важным его элементом является так называемые "критические" связи. Связь называется

критической, если разрыв ее полностью прекращает ток через БК. Таким образом, через такую связь проходит весь ток и поэтому на ней реализуется наибольшее падение напряжения (по сравнению с другими, некритическими, связями). Наличие корреляционной длины и критических связей позволяет предложить уже упоминавшуюся достаточно простую модель БК, позволяющую выразить  $t$  через  $\beta$  и  $\nu$ . Предполагается, что весь БК для  $p$  вблизи  $p_c$  можно представить в виде регулярной сетки с размером ячейки  $\xi_p$ , а сопротивление всего БК можно вычислить (для образца в виде  $d$ -мерного куба) по формуле последовательно-параллельного соединения сопротивлений

$$R(L) = (L/\xi)R_\xi / (L/\xi)^{d-1} = (L/\xi)^{2-d} R_\xi,$$

где  $R_\xi$  - сопротивление одного звена длиной  $\xi_p$ . Так как, с другой стороны,  $R = \rho L^{2-d}$ , где  $\rho$  - удельное электросопротивление, то  $\sigma \sim \xi^{2-d} / R_\xi$ . Для вычисления  $R_\xi$  допустим (и это второе предположение), что  $R_\xi = N_c(\xi)$ , где  $N_c(\xi)$  - число критических связей на длине  $\xi_p$ . Для последнего имеется точный результат: независимо от размерности решетки  $N_c = 1/(p - p_c) = \xi_p^{1/\nu}$ . Тогда

$$\sigma \sim (p - p_c)^t \sim \xi^{-t/\nu} \sim \xi^{(2-d)-1/\nu}.$$

Сравнивая показатели, окончательно имеем:

$$t \approx \nu(d - 2) + 1. \quad (7.7)$$

Таким образом, мы приближенно выразили индекс проводимости  $t$  через индексы  $\nu$  и  $d$ .

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое «критический индекс»?
2. Как «устроен» бесконечный кластер? Что такое мощность

бесконечного кластера и корреляционная длина?

3. Объясните самоподобие фрактальных объектов.
4. Выведите соотношение  $D = d - \beta/\nu$ .

## Лекция 8.

### МЕЗОСКОПИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ.

#### 1. Введение.

Хорошо известно, что в последнее десятилетие потребности развития микро- и наноэлектроники стимулировали существенный прогресс в технике микролитографии. Это привело к впечатляющим достижениям в технологии создания геометрически хорошо определенных, контролируемых и воспроизводимых металлических и полупроводниковых структур субмикронных и нанометровых размеров. Эти успехи придали новый импульс изучению проводимости и ее флуктуаций в микроконтактах различных типов - туннельных переходах малой площади, точечных контактах, микромостиках и т.п.

Так как при милликельвиновых температурах характерная длина сбоя фазы  $L_\varphi$  у электрона в умеренно неупорядоченных металлах может легко достигать микрона и более (характерные оценки см. ниже), то стало возможным экспериментальное изучение образцов с размерами меньше или порядка  $L_\varphi$ . Как оказалось, физические процессы в проводниках таких малых размеров определяются, в первую очередь, квантовой интерференцией электронных волновых функций. Исследование проводимости и ее флуктуаций для таких объектов привело к созданию и развитию новой области физики, которая в широком смысле может быть определена как

"мезоскопическая" физика, исследующая структуры относительно большие в сравнении с размерами атомов, но достаточно малые для того, чтобы квантовомеханическая интерференция была существенной и поведение статистических характеристик образца не являлось "самоусредняющимся". Напомним, что последнее предполагает часто встречающуюся в статистической физике ситуацию, когда распределение вероятностей значений той или иной термодинамической или кинетической характеристики образца является гауссовым с относительной шириной  $\sim \sqrt{N}$ , где  $N$  - число частиц в образце ( $N \sim V$  - объему образца). Как следствие, относительные флуктуации средних убывают с ростом  $N$  в этом случае как  $1/\sqrt{N}$ , что и есть основной признак "самоусредняющихся" величин.

Самоусредняющимися являются все те физические величины, локальные значения которых в разных точках образца являются статистически независимыми на длинах, значительно меньших размера образца  $L$ . Иными словами, это те величины, для которых характерные значения их радиуса корреляции (понимаемого как характерный масштаб спадающей автокорреляционной функции)  $r_c$  ("длины корреляции") становится меньше  $L$ . Фазовые переходы II-го рода дают известный пример мезоскопического поведения образца конечных размеров, когда его температура достаточно близка к критической, так что  $r_c(T \rightarrow T_c) \geq L$ . Соответственно, равновесные флуктуации параметра порядка такого образца будут негауссовыми, т.е. аномальными, т.к. их амплитуда будет иначе зависеть от  $L$ , чем для случая  $L \gg r_c(T)$  (гауссовый режим).

В интересующем нас ниже случае будет идти речь о несамоусредняемости кинетических характеристик образца - проводимости и ее флуктуаций. Связанные с этим эффекты состоят в

необычном поведении проводимости одного образца при изменении внешних параметров - магнитного поля, химического потенциала и т.д. – и проявляются в виде беспорядочных флуктуаций ("травы") на усредненной кривой магнитосопротивления, на вольт-амперной характеристике (ВАХ) и т.д. В противоположность тепловому шуму эти флуктуации полностью воспроизводимы при повторных измерениях на данном образце, ибо они определяются только конкретной конфигурацией рассеивателей, которая на достаточно коротких временах наблюдения может считаться заданной.

Итак, под мезоскопией в "широком смысле" можно понимать любые негауссовы флуктуации характеристик микроскопически неоднородной среды, имеющие аномальную размерную зависимость. В "узком смысле" можно говорить о мезоскопических флуктуациях электропроводности малых образцов при низких температурах. В этих лекциях мы будем интересоваться в первую очередь мезоскопией в этом узком смысле. Основные вопросы, которые здесь возникают - выяснение амплитуды этих флуктуаций и ее температурной и размерной зависимости, а также характерных корреляционных масштабов по различным внешним параметрам - магнитному полю, току, положению дефектов.

2. Перейдем к выяснению физических предпосылок появления мезоскопических флуктуаций электропроводности в неупорядоченных металлических проводниках малых размеров.

2.1 Общие представления о проводимости (напоминание) с точки зрения существенности квантовых когерентных эффектов, т.е. характерных временных и пространственных масштабов сохранения фазы волновой функции электрона.

Изучение электропроводности при комнатных ( $T \sim 300$  К) температурах в образцах с размерами  $\sim 1$  см. приводит к тому, что

информация о фазе электронной волновой функции, которая сохраняется при упругих рассеяниях, существенно теряется из-за достаточно частых столкновений электрона с фононами и другими электронами. Действительно, тогда время неупругих столкновений  $\tau_{in} \sim \hbar/T \sim 10^{-13}$  с и длина сохранения когерентности  $L_\phi^2 \sim D\tau_{in} \sim \sim lv_F \tau_{in} \sim 10^{-7} \cdot 10^8 \cdot 10^{-13} \tilde{n} \dot{\hbar}^2 \sim 10^{-12} \tilde{n} \dot{\hbar}^2$ , т.е.  $L_\phi \sim 100 \text{ \AA}$ .

Следовательно, в высокотемпературной области все эффекты, связанные с когерентностью электронных волновых функций исчезают на длинах  $\geq 100 \text{ \AA}$ , что значительно меньше длины образца. Волновые свойства электронов тогда можно игнорировать, чему отвечает успешное использование уравнения Больцмана в кинетике.

Прогресс в микролитографии привел к возможности создания металлических образцов с размерами  $L < 1$  мкм. Охлаждение их до температур  $< 1$  К делает  $L_\phi \geq 10$  мкм, что уже сравнимо или больше, чем размеры образца (т.е.  $L_\phi(T) \geq L$ ). В этом режиме учет когерентности волновых функций электронов становится существенным при изучении "транспортных" свойств образцов и квазиклассическое описание электронов с помощью уравнения Больцмана становится неадекватным.

Как уже упоминалось во введении, кинетические свойства таких "мезоскопических" образцов с  $l \ll L \ll L_\phi$  (где  $l$  – упругая длина свободного пробега) не являются самоусредняющимися из-за того, что, например, распределение вероятностей проводимости образца гораздо более широкое, чем гауссово. Иначе, флуктуации проводимости будут аномальными, негауссовыми. Для того чтобы понять механизм появления таких флуктуаций в когерентном режиме и оценить их величину, удобно воспользоваться представлениями



Ландауэра о связи кондактанса мезоскопического образца с вероятностью рассеяния на нем электронных волн.

2.2. Обсудим основное в теории мезоскопических флуктуаций электропроводности утверждение о том, что мезоскопические флуктуации кондактанса металлического образца универсальны, т.е. порядка  $e^2/\hbar$  вне зависимости от размерности образца  $d$ , его размеров  $L$  и *упругой* длины свободного пробега  $l$  (при условии  $l \ll L \ll L_\varphi(T)$ , где  $L_\varphi$  - длина сбой фазы).

Фактически предлагаемое рассуждение является элементарной иллюстрацией вычисления флуктуаций прозрачности рассеивающей среды в квазиклассическом (для  $l \gg \lambda$ , где  $\lambda$  - де-бройлевская длина волны электрона) приближении, когда распространение электронной волны можно описывать на языке диффузионных траекторий с приблизительно равным вкладом в вероятность прохождения (прозрачность). Согласно формуле Ландауэра, кондактанс мезоскопического образца может быть представлен в виде

$$G = \frac{e^2}{\hbar} \sum_{a,b} T_{ab}, \quad (8.1)$$

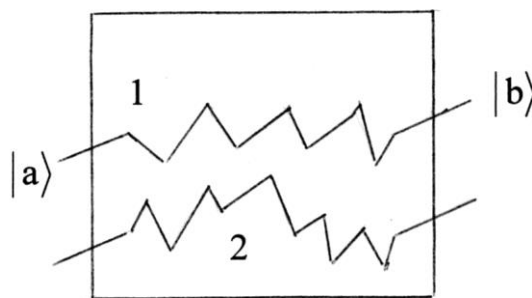


Рис.8.1.

где  $T_{ab}$  - безразмерная квантовомеханическая "прозрачность" образца в канале  $(a,b)$ , то есть  $T_{ab} = |t_{ab}|^2$ , а  $t_{ab} = \sum_p A_{ab}^p$  есть амплитуда

перехода из состояний  $|a\rangle$  в левом берегу в состояния  $|b\rangle$  в правом берегу. Для  $A_{ab}^p$  - амплитуды реализации случайной траектории  $p$  имеем обычное квазиклассическое выражение

$$A_{ab}^p \sim \exp\left\{i/\hbar \int \vec{p} d\vec{l}\right\} \sim \exp(2\pi i S_{ab}^p / \lambda) .$$

Здесь  $S_{ab}^p$  есть полная длина случайной траектории  $p$  с тем условием, что падающая волна находится в канале  $|a\rangle$ , а рассеянная на выходе образца в канале  $|b\rangle$ . Наиболее просто выражение (8.1) можно получить, вычисляя кондактанс туннельного контакта. Кстати, такое вычисление предполагает, что рассматриваемый электрон не испытывает сбоя фазы (т.е. неупругого рассеяния) в процессе пересечения мезоскопического (туннельного) контакта. Из формулы (8.1), видно, что вычисление среднего (по расположению рассеивателей) значения безразмерного кондактанса  $\langle g \rangle \equiv \langle G \rangle / (e^2 / \hbar)$  и его флуктуаций  $\langle (\delta g)^2 \rangle$  сводится к вычислению  $\langle T_{ab} \rangle$  и  $\langle (\delta T_{ab})^2 \rangle$ .

Опустим пока индексы  $(a, b)$ , т.е. вычислим  $T = |t|^2 = \left| \sum_p A_p^2 \right|$ ,

где  $A_p = \sqrt{|A_p|^2} \exp(i\varphi_p) \equiv \sqrt{T_p} \cdot e^{i\varphi_p}$  - комплексная амплитуда реализации  $p$ -ой траектории, а  $T_p \equiv |A_p|^2$  парциальная прозрачность, соответствующая этой траектории. В классическом пределе, когда можно пренебречь интерференцией амплитуд на различных траекториях должно быть  $T = \sum_p^N T_p$ , т.е. полная прозрачность равна сумме парциальных прозрачностей  $T_p$ . Однако в квантовом случае (при учете интерференции)  $T \neq \sum_p^N T_p$ .

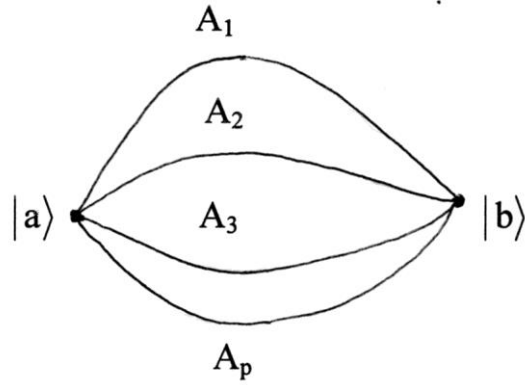


Рис.8.2.

Действительно,

$$\begin{aligned}
 T &= \left| \sum_p^N A_p \right|^2 = \left( \sum_p^N \sqrt{T_p} e^{i\varphi_p} \right) \left( \sum_q^N \sqrt{T_q} e^{-i\varphi_q} \right) = \sum_{p,q}^N \sqrt{T_p T_q} e^{i(\varphi_p - \varphi_q)} = \\
 &= \sum_p^N T_p + \sum_{p \neq q}^{\sim N^2} \sqrt{T_p T_q} \cdot 2 \cos(\varphi_p - \varphi_q) . \quad (8.2)
 \end{aligned}$$

При переходе от предпоследнего равенства к последнему в формуле

(8.2) мы из суммы  $\sum_{p,q}^N$ , содержащей  $N^2$  слагаемых, выделили

отдельно слагаемые с  $p = q$ , равные  $\sum_p^N T_p$ , которые описывают

классический вклад, а остальные  $N^2 - N$  слагаемых с хаотическими, в силу условия  $l \gg \lambda$ , фазами, переписали, используя формулу Эйлера.

Полученное выражение для  $T$  является суммой двух слагаемых. Первое соответствует классическому рассмотрению, когда различные пути проходятся независимо ( $\sim N$ ), а второе связано с интерференцией амплитуд прохождения на различных траекториях

( $\sim N^2$ ). При усреднении по ансамблю случайно расположенных примесных центров второе слагаемое, ответственное за интерференцию, исчезает, если  $L \gg \lambda$  и пренебречь "возвратными" траекториями, ответственными за слабую локализацию, для которых  $\langle \cos(\varphi_p - \varphi_q) \rangle = 1$ , так как в отсутствие магнитного поля  $\varphi_p = -\varphi_q$  и,

так как для остальных траекторий  $\langle \cos(\varphi_p - \varphi_q) \rangle = 0$  в силу случайности и того, что  $|\varphi_p - \varphi_q| \gg 2\pi$ . Итак,

$$\langle T \rangle = \sum_p T_p = NT_p \quad \text{где} \quad T_p \approx N \frac{l}{L} \quad (N - \text{число каналов}). \quad (8.3)$$

Ситуация кардинально изменяется, если мы вычислим среднеквадратичную флуктуацию  $T$ , т.е.  $\langle (\delta T)^2 \rangle$ , где  $\delta T \equiv T - \langle T \rangle$ . Так как  $\langle (\delta T)^2 \rangle = \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2$ , то сначала вычислим  $\langle T^2 \rangle$ , для чего воспользуемся формулами (8.2) и (8.3). Тогда

$$\begin{aligned} T^2 = & \langle T \rangle^2 + 4 \langle T \rangle \sum_{p \neq q} \sqrt{T_p T_q} \cos(\varphi_p - \varphi_q) + \\ & + 4 \sum_{p \neq q} \sqrt{T_p T_q} \cos(\varphi_p - \varphi_q) \cdot \sum_{k \neq l} \sqrt{T_k T_l} \cos(\varphi_k - \varphi_l). \end{aligned}$$

Снова усредняя  $T^2$  по различным конфигурациям расположения примесей и учитывая что в последнем слагаемом ненулевой вклад дадут только слагаемые с  $p = k$  и  $q = l$  с учетом  $\langle \cos^2(\varphi_p - \varphi_q) \rangle = 1/2$ , ибо

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \sin 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2}.$$

Окончательно имеем  $\langle T^2 \rangle = \langle T \rangle^2 + 2 \sum_{p \neq q} T_p T_q$ , так что

$$\langle (\delta T)^2 \rangle = \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2 = 2 \sum_{p \neq q} T_p T_q \sim N^2 T_p^2 \approx (NT)^2 \sim \langle T \rangle^2 \quad (8.4)$$

где  $T$  – средняя прозрачность для типичной диффузионной траектории. Тогда относительная флуктуация прозрачности одного канала будет порядка единицы, т.е.

$$\frac{\langle (\delta T)^2 \rangle}{\langle T \rangle^2} = \frac{2 \sum_{p \neq q} T_p T_q}{(\sum_p T_p)^2} \sim \frac{N^2 T_p^2}{(NT)^2} \sim 1 \quad \text{или} \quad (\delta T)^2 = \langle T^2 \rangle. \quad (8.5)$$

Итак, относительные флуктуации прозрачности в каждом канале  $T$  порядка единицы, т.е. аномальны. Вернемся теперь к формуле (8.1),

которую удобнее записать в виде

$$g = \sum_{a,b}^{N_c} T_{ab} \quad , \quad (8.6)$$

где  $N_c$  – число каналов. Для оценки флуктуаций  $g$  получим сначала выражение для  $g$  через макропроводимость (для  $\xi_c \gg L$ ), предполагая, что образец длиной  $L$  в направлении протекания тока имеет площадь поперечного сечения  $S = W^{d-1}$ , где  $d$  – размерность образца. Так как  $R = \rho L/S = L/\sigma W^{d-1}$ , то

$$G = \sigma W^{d-1} / L = (e^2 / \hbar)(l / \lambda^{d-1})(W^{d-1} / L) \quad \text{и}$$

$$g = (l / L)(W / \lambda)^{d-1} \equiv N_c(l / L) \quad , \quad (8.7)$$

где мы учли, что  $\sigma = ne^2\tau / m = ne^2l / (\hbar / \lambda) = (e^2 / \hbar)(l / \lambda^{d-1})$ .

Для металла  $g \gg 1$ , так что  $N_c \gg (L / l) \gg 1$ .

Предположим теперь, что интерференция (т.е. корреляция) между каналами отсутствует, т.е. их флуктуации складываются независимо. Оценим тогда величину среднеквадратичной флуктуации  $\Delta g \equiv \langle (\delta g)^2 \rangle^{1/2}$ , исходя из формул (8.6) и (8.7). Тогда

$$g = \langle g \rangle + \sum_{a,b}^{N_c} \delta T_{ab} \quad ,$$

где  $\langle g \rangle \sim N_c^2 T_0$  (из формулы (8.6)), а  $\delta T \sim \pm T_0$  в силу (8.5) и

$$\delta g = g - \langle g \rangle \equiv \sum_{a,b}^{N_c} \delta T_{ab} = \sum_i^{N_c^2} \delta T_i \quad , \quad \text{где мы заменили двойной индекс}$$

$(a,b)$  одним индексом  $(i)$ , и учли, что суммируем по  $i$  от 1 до  $N_c^2$ . В силу

того, что значения  $\delta T_i$  знакопеременны и порядка  $T_0$  имеем:

$$\langle (\delta g)^2 \rangle = N_c^2 \langle (\delta T)^2 \rangle \sim N_c^2 T_0^2 \quad , \quad \text{после чего}$$

$$\Delta g \sim N_c^2 T_0^2 \sim \langle g \rangle / N_c \sim [N_c(l / L)] / N_c \sim l / L \ll 1 \quad . \quad (8.8)$$

Таким образом, если считать, что корреляция между каналами отсутствует, то мы получаем отличный от микроскопического расчета вывод (8.8) вместо ожидавшегося

$$\Delta g \sim 1 \quad (8.9)$$

Поэтому было предложено (Y.Jmry) "подправить" приведенные выше рассуждения так, чтобы получить правильный результат (8.9). Именно, если считать, что вместо условия  $g = \langle g \rangle / N_c$  написать условие

$$\Delta g = \langle g \rangle / N_c^{eff}, \quad (8.10)$$

где  $N_c^{eff} \equiv N_c (l / L)$  - число "активных" каналов, то мы получим правильный результат (8.9). Физическим основанием для введения  $N_c^{eff}$  является то, что вблизи перехода М-И (т.е. для  $\xi_l \sim L$ ) образец становится эффективно одномерным, т.е.  $N_c^{eff} \sim 1$ .

Стоит еще отметить, что относительные универсальные флуктуации кондактанса (UCF – universal conductance fluctuations) обратно пропорциональны кондактансу  $\Delta g / g \sim 1 / g$  и, таким образом, уменьшаются по мере удаления образца от точки М-И перехода (где  $g \sim 1$ ) в сторону "хорошего" металла ( $g \gg 1$ ).

Отметим также, что величина этих универсальных флуктуаций кондактанса является аномальной с точки зрения обычной классической теории проводимости, предполагающей, что на расстояниях  $\geq l$  можно пренебречь волновыми свойствами электрона. В таком подходе величину флуктуаций можно оценить, если рассматривать образец как совокупность независимых "зерен" линейного размера  $l$ , так что согласно общим принципам статистики

$$\frac{\sqrt{(\delta G_{\xi\xi})^2}}{\langle G \rangle} \sim \frac{1}{\sqrt{N_i}} = \frac{1}{(L/l)^{d/2}} \sim \left( \frac{l}{L} \right)^{d/2}.$$

Так как  $\langle G \rangle \sim \sigma L^{d-2}$ , где  $\sigma \sim (e^2 / \hbar)(l / \lambda^{d-1})$ , то

$$\sqrt{(\delta G_{\epsilon\epsilon})^2} \sim \sigma L^{d-2} \cdot \frac{l^{d-2}}{L^{d-2}} \sim \sigma l^{d-2} L^{(d/2)-2} \sim L^{\frac{d-4}{2}} \rightarrow 0$$

при  $L \rightarrow \infty$ . В противовес этому, универсальные флуктуации кондактанса не зависят от  $L$  до тех пор, пока  $L < L_\phi$ .

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Самоусредняемость в физике – примеры.
2. Каков критерий самоусредняемости?
3. В чем проявляется универсальность аномальных флуктуаций кондактанса?
4. Практические следствия наличия универсальных флуктуаций кондактанса для микро- и наноэлектроники.

## Лекция 9

### МЕЗОСКОПИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ

(продолжение)

2.3. Итак, мы видим, что от образца к образцу, при заданной средней концентрации примесей его кондактанс испытывает сильные флуктуации, причиной которых является квантовая интерференция на расстояниях  $L \ll L_\phi(T)$ , где при  $T \rightarrow 0$   $L_\phi(T) \rightarrow \infty$ . Экспериментально такие флуктуации можно наблюдать на одном и том же образце, если его поместить в изменяющееся по величине магнитное поле (см. рис. 9.1). В присутствии магнитного поля каждая электронная траектория приобретает дополнительное фазовое слагаемое вида  $\int \vec{A} d\vec{l}$ , где  $\vec{A}$  - вектор-потенциал поля и условия интерференции между двумя траекториями полностью изменяются, если магнитный поток заключенный между двумя траекториями, порядка кванта потока  $\hat{O}_0 = 2 \cdot 10^{-7} \tilde{a}\tilde{n} \cdot \tilde{n}\tilde{i}$ . Площадь, охватываемая этими двумя путями порядка площади образца. Поэтому, величина

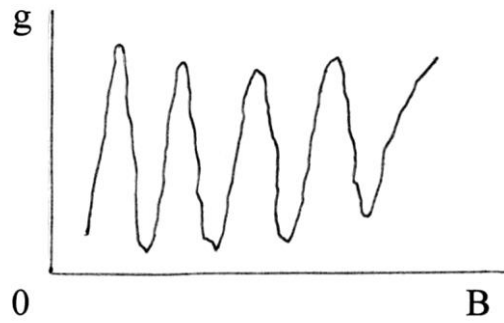


Рис. 9.1

изменения магнитного поля  $\Delta B_c$ , приводящая к появлению эффективно нового образца, дается оценкой  $\Delta B_c \sim \Phi_0 / L^2$ , что для  $L \approx 10^{-4}$  см дает  $\Delta B \approx 10$  Гс. Это действительно наблюдается на опыте. Надо, однако, еще раз подчеркнуть, что эти кажущиеся хаотическими флуктуации магнитокондактанса для данного мезоскопического образца как функции приложенного магнитного поля надо отличать от шумов.

Когда мы увеличиваем или уменьшаем величину поля, флуктуации  $g(B)$  полностью воспроизводятся при условии, что за время измерения в образце конфигурация примесей не изменилась. Такая запись магнитокондактанса мезоскопического образца может рассматриваться как своего рода его "magnetofingerprint".

2.4. В качестве следующего примера рассмотрим флуктуации ВАХ мезоскопического образца. Их природа связана с тем, что условия квантовой интерференции определяются набегом фазы на диффузионных траекториях, а величина последнего пропорциональна (в первом приближении) величине электрического поля в образце. Действительно, пусть  $V$  – разность потенциалов на образце. Тогда, электрон при движении через образец приобретает дополнительную энергию  $\delta\varepsilon = eV$ . Соответствующее изменение фазы будет порядка

$$\delta\varphi \sim [p(\varepsilon + \delta\varepsilon) - p(\varepsilon)]S/\hbar \sim S(dp/d\varepsilon)\delta\varepsilon/\hbar \sim S\delta\varepsilon/\hbar v_F,$$



где длина диффузионной траектории,  $S \sim v_F t \sim v_F L^2 / D$ . Следовательно

$$\delta \varphi \sim \delta \varepsilon L^2 / \hbar D \quad .$$

Для сбоя фазы, достаточно  $\delta \varphi_c \sim 1$ , откуда  $\delta \varepsilon_c \sim \hbar D / L^2$  и для критического значения разности потенциалов  $V$  имеем

$$V_c \sim \hbar D / e L^2 \quad .$$

Для  $V \ll V_c$  ВАХ линейна, т.е. выполняется закон Ома. Выясним теперь масштаб мезоскопических флуктуаций ВАХ по току. Исходим из того, что для тока  $I = VG$ , где теперь вся область приложенных напряжений разбивается на  $V / V_c$  независимых интервалов, где, благодаря флуктуациям кондактанса на величины  $\pm e^2 / \hbar$ , суммарная флуктуация по току выражается через "элементарную" флуктуацию на интервале  $V_c$   $\Delta I_c \sim V_c \Delta G$  так же, как и при диффузионных блужданиях (когда средний квадрат пройденного расстояния  $L^2$  пропорционален  $Nl^2$ , где  $N$ -число шагов, а  $l^2$ -кватрат длины одного шага). Тогда

$$\langle (\delta I)^2 \rangle (V / V_c) (\delta I_c^2) \sim (V / V_c) (V_c e^2 / \hbar)^2 \sim V V_c (e^2 / \hbar).$$

Откуда

$$\Delta I(V) = \sqrt{\langle (\delta I)^2 \rangle} \sim \sqrt{V V_c} (e^2 / \hbar) \quad .$$

Эти флуктуации в виде хаотической "травы" накладываются на регулярную кривую, соответствующую закону Ома  $\langle I \rangle = V \langle G \rangle$ , где  $\langle G \rangle = G_0$  - кондактансу при  $V \ll V_c$  (см. рис. 9.2, где изображена зависимость  $G(V)$  от "управляющего" напряжения для MOSFET образца с  $L = 10 \mu\text{м}$  и  $W = 0,05 \mu\text{м}$  для трех разных температур).

Любопытно выяснить также поведение отношения  $\Delta I(V) / V_c$  с ростом  $V$ . Из формулы для  $\Delta I(V)$  сразу следует что:

$$\Delta G \sim \frac{\Delta I(V)}{V_c} \sim \sqrt{\frac{V}{V_c}} \cdot \frac{e^2}{\hbar} \quad .$$

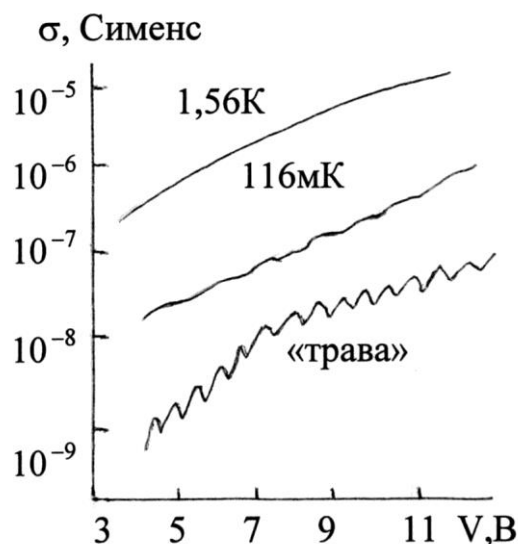


Рис.9.2.

т.е. с ростом напряжения "размах" динамического кондактанса ( на интервале порядка  $V_c$  ) растет с ростом  $V$ , что может привести на ВАХ к появлению участков с отрицательным дифференциальным сопротивлением  $dV/dI < 0$ . Отметим также, что ВАХ данного мезоскопического образца, в силу ее зависимости от конкретной конфигурации расположения примесей, вообще говоря, является ассиметричной по току, т.е.  $V(I) \neq V(-I)$  - в отличие от ВАХ макроскопического образца с той же концентрацией дефектов.

2.5.Перейдем, однако, к анализу возможности изменения положения примесей. Ранее мы показали, что изменение конфигурации всех примесей в мезоскопическом ( $l \ll L \ll L_\phi$ ) образце приводит к изменению безразмерного кондактанса на величину порядка единицы, то есть  $\Delta g \sim 1$ . Такая сильная чувствительность мезокондактанса к конкретной реализации случайного примесного потенциала образца позволяет предположить, что для получения приведенного выше результата  $\langle (\delta G)^2 \rangle \sim e^2 / \hbar$  нет обязательной необходимости одновременно изменять координаты большинства примесей. Действительно, даже смещение на незначительное расстояние (порядка

длины волны электрона  $\lambda$ ) даже одной примеси изменит фазы всех электронных траекторий, проходящих через данный примесный центр на величину порядка единицы и тем самым может существенно изменить интерференционный вклад в величину  $\Delta G$ . Предварительно сделаем качественную оценку величины такого влияния с точки зрения классической теории флуктуаций, что дает  $\Delta G_i \approx \Delta G \sqrt{N_i} \sim (e^2 / \hbar) \sqrt{N_i}$ , где  $N_i$  - количество примесей в мезоскопическом образце.

Квантовая оценка величины флуктуаций кондактанса, обусловленная перемещением одной примеси (S.Feng et al, 1986) исходит из того, что среднее число актов рассеяния на примесях в процессе движения одного электрона через мезоскопический образец длиной  $L$  есть  $N_c \sim (L/l)^2$ . Пусть  $N_i$  есть количество примесей (рассеивающих центров) в мезоскопическом образце длиной  $L$ . Тогда, среднее число примесей на одной электронной траектории  $N \sim (L/l)^2$ , т.е. равно числу диффузионных шагов траектории длиной  $L$  с элементарным шагом диффузии  $l$ , равным упругой длине свободного пробега электрона. Доля примесей, "посещенных" одним электроном, прошедшим сквозь образец есть  $(N_i / N_c)^{-1} < 1$  для  $d \geq 2$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{N_c}{N_i} &\sim \left(\frac{L}{l}\right)^2 \cdot \frac{1}{C_i N} \sim \left(\frac{L}{l}\right)^2 \cdot \frac{1}{(\lambda/l)(L/l)^d} = \\ &= \left(\frac{L}{l}\right)^2 \cdot \frac{l}{\lambda} \cdot \left(\frac{\lambda}{L}\right)^d \sim \frac{\lambda^{d-1}}{l} \cdot L^{2-d}, \end{aligned}$$

где  $C_i = \lambda / l$  - концентрация примесей, а  $\lambda = 2\pi / k_F$  (где  $k_F$  - волновой вектор электрона на уровне Ферми). Это означает, что каждая примесь (для  $d \geq 2$ ) будет посещена долей  $N_c / N_i$  от общего числа электронов  $N$ . Иными словами, сдвиг только одной примеси дефазировует  $N_{def} = (N_c / N_i) N$  электронов. Так как кондактанс образца

пропорционален электронной плотности, т.е. аддитивен по числу электронов, то изменение фазы одного из них дает "элементарный" вклад в флуктуацию кондактанса величиной  $\Delta G_e = \pm (e^2 / \hbar) \sqrt{N}$ , а в силу стохастичности этого вклада общий вклад  $\Delta G = N_{def} \Delta G_e$  будет пропорционален квадратному корню из числа дефазированных электронов, т.е. величине  $(N_c / N_i)^{1/2}$ . Окончательно, флуктуация кондактанса, обусловленная сдвигом одной примеси на расстояние  $\geq \lambda$  есть

$$\Delta G \sim \frac{e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{N_c}{N_i}} \sim \frac{e^2}{\hbar} \left( \frac{\lambda^{d-1}}{l} \right)^{1/2} L^{\frac{2-d}{2}}, \quad (9.1)$$

т.е. в случае  $d = 2$  вообще не зависит от  $L$ .

Пользуясь этой формулой, легко понять, что максимальное значение флуктуации кондактанса  $\delta G \sim e^2 / \hbar$ , соответствующее его "насыщению", будет достигнуто при смещении  $\delta N_i$  примесей, где  $\delta N_i (N_c / N_i) \geq 1$ , т.е. при условии, что смещена доля

$$\frac{\delta N_i}{N_i} > \frac{1}{N_c} \sim \left( \frac{l}{L} \right)^2 \quad (9.2)$$

примесей, тогда как при обратном неравенстве

$$\Delta G \sim \frac{e^2}{\hbar} \left( \frac{L}{l} \right) \sqrt{\frac{\delta N_i}{N_i}}, \quad \text{где} \quad \frac{\delta N_i}{N_i} < \left( \frac{l}{L} \right)^2. \quad (9.3)$$

Таким образом, для того, чтобы получить максимальное значение флуктуации кондактанса  $\delta G \sim e^2 / \hbar$  нет необходимости изменять положение всех примесных атомов, а достаточно сдвинуть лишь их относительно малую  $(l / L)^2 \ll 1$  долю ( $d = 2$ ).

Возвращаясь теперь к сравнению полученной квантовой оценки  $\Delta G_l \sim (e^2 / \hbar)(L/l) / \sqrt{N_i}$  с предполагаемой классической

$\Delta G_1^{ii} \sim (e^2 / \hbar) / \sqrt{N_i}$  мы видим, что интерференционные эффекты в  $(L/l) \gg 1$  раз увеличивают эффект влияния смещения одной примеси на величину флуктуаций мезокондуктанса.

Полученные выше формулы для  $\delta G$  (9.1) – (9.3) нигде не содержали  $L_\varphi(T)$ , а потому были пригодны лишь для достаточно малых ( $L \ll L_\varphi$ ) образцов и, фактически, при  $T = 0$  (без учета теплового размытия ферми - ступеньки). Вместе с тем интересно рассматривать эти флуктуации, когда температура и размер образца таковы, что длина когерентности  $L_\varphi$  меньше, чем один или более размеров образца с тем, чтобы, в частности, выяснить зависимость величины этих флуктуаций от  $L_\varphi(T)$ . В этом случае поведение электронов будет когерентным на масштабах, меньших  $L_\varphi$  и перестает быть таковым на больших масштабах. Поэтому полезно представлять себе такой образец как составленный из когерентных блоков с линейным размером  $L_\varphi$  (см. рис. 9.3).

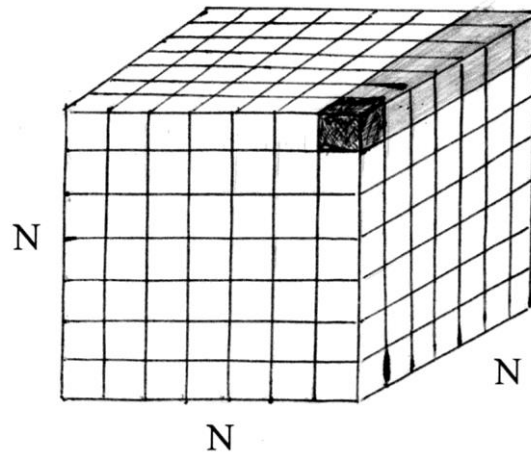


Рис. 9.3

Качественное поведение внутри таких блоков будет таким, как это обсуждалось выше, т.е. флуктуации кондуктанса будут описываться формулами (9.1 – 9.3). Из-за эффектов сбоя фазы на границах блоков, поведение флуктуаций в различных блоках

остается нескоррелированным и флуктуации всего образца могут быть получены комбинацией флуктуаций в отдельных блоках с учетом их независимости.

В первую очередь здесь представляют интерес два простых случая.

1) Пусть имеется единственный флуктуирующий (перемещающийся) центр рассеяния. Тогда

$$\langle (\delta G)^2 \rangle \approx \left( \frac{L_\varphi}{L_z} \right)^4 \langle (\delta G_i)^2 \rangle, \quad (9.4)$$

где  $\langle (\delta G)^2 \rangle$  – среднеквадратичная флуктуация кондактанса всего образца,  $\langle (\delta G_i)^2 \rangle$  – флуктуация кондактанса, связанная с перемещением одной примеси, а  $L_z$  – размер системы в направлении протекания тока. Этот результат не зависит от числа измерений. Видно, что с ростом  $L_z$  величина  $\langle (\delta G)^2 \rangle$  уменьшается пропорционально  $L_z^4$ , т.е. достаточно медленно (алгебраическое, а не экспоненциальное убывание). Докажем (9.4). Обозначим  $N = L/L_\varphi$  – число блоков, укладываемых в линейном размере нашего образца (размерности  $d = 1, 2, 3$  (см. рис. 9.3), где для примера изображен трехмерный куб). Рассматриваемый образец состоит из  $N^{d-1}$  параллельных "нитей", одна из которых обозначена штриховкой, так что  $G = \sum_i^{N^{d-1}} G_i^i$ , где  $G_1^i$  – кондактанс одной нити. В рассматриваемом нами простейшем случае имеется лишь один флуктуатор на весь образец, т.е. только один блок на одной из нитей флуктуирует. Задача состоит в том, чтобы выразить среднеквадратичную флуктуацию кондактанса всего образца  $\langle (\delta G)^2 \rangle$  через флуктуации кондактанса одной нити  $\langle (\delta G_1^i)^2 \rangle$ , а последнюю – через флуктуацию одного блока  $\langle (\delta g)^2 \rangle$ , где  $g$  теперь кондактанс

одного блока. Если первая часть расчета проста, т.к.  $\delta G = \delta G_1$  (флуктуирует только одна нить), то определение связи  $\langle (\delta G_1)^2 \rangle$  и  $\langle (\delta g)^2 \rangle$  более трудоемко, т.к. в цепи последовательных блоков, составляющих нить, аддитивными являются их сопротивления, а не кондактансы. Поэтому мы сначала свяжем между собой флуктуации  $\delta G_1$  и  $\delta R_1$

$$\begin{aligned} \delta G_1 = G_1 - \langle G_1 \rangle &= \frac{1}{\langle R_1 \rangle + \delta R_1} - \langle G_1 \rangle \cong \\ &\cong \langle G_1 \rangle (1 - \langle G_1 \rangle \delta R_1) - \langle G_1 \rangle = - \langle G_1 \rangle^2 \delta R_1 \quad . \end{aligned} \quad (9.5)$$

Так как в нашем случае  $\delta R_1 = \delta r$ , где  $\delta r$  – флуктуация сопротивления единственного (среди  $N$ ) блока в нити. Связь же  $\delta g$  и  $\delta r$  получается аналогичным (9.5) образом

$$\delta g = - \langle g \rangle^2 \delta r \quad ,$$

т.е.  $\delta G_i = (\langle G_1 \rangle / \langle g \rangle)^2 \delta g$ . Учитывая, что  $\langle G_1 \rangle = \langle g \rangle / N$  получаем окончательно

$$\langle (\delta G)^2 \rangle = \frac{1}{N^4} \langle (\delta g)^2 \rangle \quad . \quad (9.6)$$

2) Второй вариант, который мы рассмотрим, дает флуктуации полного кондактанса в том случае, когда каждый блок "шумит" в среднем одинаково, т.е. в среднем одинаковое число примесных центров совершает переходы в каждом блоке. В этом случае небольшая модификация изложенного выше расчета приводит к следующей формуле

$$\langle (\delta G)^2 \rangle = \langle (\delta g)^2 \rangle \left( \frac{G}{g} \right)^2 \frac{\omega}{\Omega} \quad , \quad (9.7)$$

где  $G \equiv \langle G \rangle$  и  $g = \langle g \rangle$ , а  $\omega$  и  $\Omega$  – объемы блока и всего образца соответственно. Покажем, в каких местах соответствующий расчет

выглядит иначе. Во-первых, т.к.  $\delta G = \sum_i^{N^{d-1}} \delta G_1^i$ , то  $\langle (\delta G)^2 \rangle =$   
 $= N^{d-1} \langle (\delta G_1)^2 \rangle$ . Во-вторых,  $\delta R_I = \sum_i^N \delta r_i$  и (по аналогичной при-  
 чине)  $\langle (\delta R_I)^2 \rangle = N \langle (\delta r)^2 \rangle$ . Учтя также ранее доказанные соотно-  
 шения  $\langle (\delta G_1)^2 \rangle = \langle G_1 \rangle^4 \langle (\delta R_1)^2 \rangle$  и  $\langle (\delta g)^2 \rangle = \langle g \rangle^4 \langle (\delta r)^2 \rangle$   
 получаем с учетом  $\langle G \rangle = N^{d-1} \langle G_1 \rangle = N^{d-1} \cdot \frac{\langle g \rangle}{N} = N^{d-2} \langle g \rangle$ , что

$$\begin{aligned} \langle (\delta G)^2 \rangle &= N^{d-1} \langle G_1 \rangle^4 N \cdot \frac{\langle (\delta g)^2 \rangle}{\langle g \rangle^4} = N^{d-4} \langle (\delta g)^2 \rangle \frac{N^d}{N^d} = \\ &= \frac{1}{N^d} \left( \frac{\langle G \rangle}{\langle g \rangle} \right)^2 \langle (\delta g)^2 \rangle, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать (т.к.  $1/N^d = \omega/\Omega$ ).

Так как мы предположили, что внутри каждого блока примеси движутся независимо, то  $\langle (\delta g)^2 \rangle = N_m \langle (\delta g_1)^2 \rangle$ , где  $N_m$  – среднее число движущихся примесей в блоке, а  $\langle (\delta g_1)^2 \rangle$  – мезоскопическая средне-квадратичная флуктуация кондактанса блока  $g$ , связанная с перемещением одной примеси (см. формулу (9.1), где необходимо заменить  $G_I$  на  $g_I$ ). При этом должно соблюдаться ограничение типа (9.2) на то, чтобы флуктуация для каждого блока не превышала  $e^2/\hbar$ , так что если  $N_m$  достаточно велико, так что  $[N_m \langle (\delta g_1)^2 \rangle]^{1/2} \geq e^2/\hbar$ , то величина флуктуации насыщается и мы имеем  $\langle (\delta g)^2 \rangle \sim (e^2/\hbar)^2$  в уравнении (9.7).

Основное необычное следствие полученных выше формул для среднеквадратичной флуктуации кондактанса всего образца (см. формулы (9.4) и (9.7), где фигурирует  $L_\varphi$ ) состоит в том, что величина флуктуации обычно достаточно быстро растет с понижением температуры, т.к.  $L_\varphi(T) \sim T^{-p}$ , где  $p > 1$ . Такое поведение квантовых



флуктуаций кондактанса противоречит обычной интуиции, базирующейся на найквистовском поведении тепловых флуктуаций сопротивления, которые прямо пропорциональны температуре  $T$  и, таким образом, уменьшаются при  $T \rightarrow 0$ .

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте оценку изменения величины магнитного поля, приводящего к новому magnetofingerprint.

2. Дайте оценку критического напряжения, приводящего к флуктуационной нелинейности ВАХ.

3. Оцените величину мезоскопических флуктуаций по току.

4. Объясните физическую причину асимметрии ВАХ по направлению тока для мезоскопического образца.

5. Оцените классическое влияние смещения примесей на флуктуации  $\Delta G$ .

6. Оцените квантовое влияние смещения примесей на флуктуации  $\Delta G$ :

а) для одного флуктуатора в образце;

б) для однородно шумящих блоков с  $N_m$  флуктуаторами в каждом.

## Лекция 10.

### УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ КОНДАКТАНСА И $1/f$ ШУМ.

$1/f$  шум – флуктуационная компонента многих естественных процессов – имеет низкочастотное поведение типа  $1/f$  (спектр мощности флуктуаций). Однако, по-видимому, не существует

универсального механизма, приводящего к шуму вида  $1/f$ , а в каждом случае надо искать конкретный механизм, ответственный за появление такого спектра при  $f \rightarrow 0$ . В данной лекции мы покажем, как найти величину такого шума в "грязных" металлах при  $T \rightarrow 0$ , если считать, что эта величина определяется механизмами квантовой интерференции в мезоскопическом режиме (т.е. UCF).

1. Основные представления о  $1/f$  шуме в проводниках (феноменология).

Обычный способ измерения  $1/f$  шума в резисторе - пропустить через него постоянный ток и регистрировать напряжение на образце как функцию времени.  $V(t)$  будет флуктуировать относительно своего среднего значения  $\langle V \rangle$ , даваемого законом Ома  $\langle V \rangle = J \langle R \rangle$ , где  $\langle R \rangle$  - среднее сопротивление. Шум обычно характеризуется автокорреляционной функцией

$$S_v(t) \equiv \langle \delta V(t_0) \delta V(t_0 + t) \rangle \quad (10.1)$$

где  $\delta V(t) \equiv V(t) - \langle V \rangle$ , а среднее  $\langle \rangle$  определяется по ансамблю образцов данного вида. Если, однако, предположить эргодичность того или иного сорта, то можно усреднять по начальному моменту  $t_0$ .

Тогда спектр мощности будет

$$S_v(\omega) = \int_0^{\infty} S_v(t) \cos(\omega t) dt \quad (10.2)$$

Поясним формулу (10.2). Для стационарного процесса  $S_v(t)$  - четная функция  $t$ . Доказательство этого факта простое:

$$S_v(t_1, t_2) = \langle \delta V(t_1) \delta V(t_2) \rangle = S_v(t_2, t_1) \quad (10.3)$$

Но для стационарного процесса автокорреляционная функция есть функция разности своих аргументов, т.е.

$$S_v(t_1, t_2) = S_v(t_1 - t_2) = S_v(t_2 - t_1).$$

Итак, симметрия коррелятора при перестановке индексов - по определению, а зависимость от разности, т.е. от одной переменной, следствие стационарности. Для четной функции поэтому в (10.2)

остается только  $\cos \omega t$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} \rightarrow 2 \int_0^{\infty}$ .

При низких частотах наблюдается "избыточный" шум со спектральной плотностью  $S(\omega) \sim 1/\omega$ , который, благодаря своей зависимости превалирует (при  $\omega \rightarrow 0$ ) над всеми другими видами шума.

Многочисленные экспериментальные исследования  $1/f$  шума в металлах привели к установлению следующих его характерных свойств (хотя не без некоторых исключений и даже противоречий в ряде случаев).

а)  $1/f$  шум стационарен, т.е.  $S_v(t_0, t)$  не зависит от  $t_0$ , т.е.  $S_v(t) = \langle \delta V(0) \delta V(t) \rangle$  и усреднение по  $t_0$  тривиально.

б)  $1/f$  является "собственным" и равновесным шумом образца, т.е. проявлением флуктуаций его сопротивления (или кондактанса).

Присутствие тока лишь "обнаруживает" и усиливает эти флуктуации (но не генерирует их). Это свойство предполагает, что  $S_v(\omega) \sim \langle V \rangle^2$ , т.к. из закона Ома следует, что  $S_v(\omega) / \langle V \rangle^2 = S_R(\omega) / \langle R \rangle^2$ , а последнее не зависит от  $\langle V \rangle$ .

Действительно,  $\delta V(t) = V(t) - \langle V \rangle = J\{R(t) - \langle R \rangle\} = J\delta R(t)$ . Тогда  $S_v(t) = J^2 \langle \delta R(0) \delta R(t) \rangle = J^2 S_R(t)$  что и требовалось доказать (так как  $J = \langle V \rangle / \langle R \rangle$ ). Заметим также, что размерность спектральной функции равна частному от деления размерности квадрата напряжения на размерность частоты, т.е.  $[S_v(\omega)] = [V]^2 / [\omega]$ .

в) В грубом приближении  $1/f$  шум – гауссов, т.е. знание второго момента  $\langle (\delta V)^2 \rangle$  (т.е.  $S_v(\omega)$ ) определяет все остальные моменты в

статистике шума. Однако, это только приблизительное утверждение.

г) Величина  $1/f$  шума обратно пропорциональна размеру системы. Это легко понять, если учесть, что механизм генерации шума (вне зависимости от его детального устройства) ограничен некоторой микроскопической (или мезоскопической, см. ниже) длиной, так что два источника шума, расположенные на расстояниях больше этой длины, уже не коррелируют.

Указанные четыре свойства ведут к так называемой феноменологической параметризации Хоога (Hooge) для  $1/f$  спектра

$$S_v(\omega) = \frac{2\pi\alpha_H \langle V \rangle^2}{N_0\omega}, \quad (10.4)$$

где  $N_0$  - полное число частиц в системе (атомов),  $\alpha_H$  - безразмерная константа (так называемый параметр Хоога), которая для большинства металлов лежит в интервале  $10^{-6} < \alpha < 10^{-2}$  при  $T \sim 300\text{K}$ .

## 2. Механизм появления $1/f$ шума в металлах.

Общепринято считать, что появление  $1/f$  шума в металлах связано с движением дефектов, которое может быть обязано по крайней мере трем причинам:

- а) Термоактивация дефектов, находящихся в метастабильных состояниях, с ростом  $T$  в некоторые новые положения;
- б) Квантовое туннелирование дефектов (двухуровневых туннельных систем (ДУС)) при низких температурах;
- в) Диффузия дефектов вдоль границ зерен.

Аргументы, приводящие к появлению  $1/f$  шума, связанного с движением отдельных дефектов, сводятся к двум правдоподобным идеям:

- 1) Полный спектр шума постулируется как суперпозиция вкладов от всех движущихся дефектов, каждый из которых характеризуется

своим временем релаксации  $\tau$ , т.е.

$$S_v(\omega) = A \int \tilde{D}(\tau) \frac{\tau}{1 + (\omega\tau)^2} d\tau, \quad (10.5)$$

Где  $\tilde{D}(\tau)$  – функция распределения времени всех движущихся дефектов, а  $A$  – константа, величина которой будет обсуждена ниже. Функция  $\tau/[1 + (\omega\tau)^2]$  есть спектральная функция случайно флуктуирующей величины с характерным временем релаксации  $\tau$  (т.е. лоренциан). Корреляционная функция, соответствующая лоренциану, есть  $\varphi(t) \sim e^{-|t|/\tau}$ , т.е. описывает экспоненциальную релаксацию.

Действительно:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos \omega t \cdot e^{-t/\tau} dt &= \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} e^{-t/\tau} dt = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{(i\omega - 1/\tau)t} dt = \\ &= \operatorname{Re} \frac{e^{(i\omega - 1/\tau)t}}{i\omega - 1/\tau} \Big|_0^{\infty} = \operatorname{Re} \frac{\tau}{1 - i\omega\tau} = \operatorname{Re} \left[ \frac{\tau(1 + i\omega\tau)}{1 + (\omega\tau)^2} \right] = \frac{\tau}{1 + (\omega\tau)^2}. \end{aligned}$$

2) Если движение дефекта является термоактивированным, что правдоподобно для достаточно высоких температур, тогда для данного дефекта должно быть

$$\tau = \tau_0 \exp(\Delta E/T),$$

где  $\Delta E$  – активационный барьер для перехода из одного метастабильного состояния в другое. Предположим, что имеется функция распределения таких энергий активации  $D(\Delta E)$ , которая является более или менее постоянной для  $E_{min} < \Delta E < E_{max}$ .

Тогда легко показать, с учетом определения  $D(\Delta E)d(\Delta E) = \tilde{D}(\tau) d\tau$ ,

Что  $\tilde{D}(\tau) \sim 1/\tau$  для

$$\tau_0 \exp(E_{min}/T) < \tau < \tau_0 \exp(E_{max}/T)$$

при условии, что масштаб изменения  $D(\Delta E) \gg T$ . Тогда это ведет к  $1/f$  поведению  $S_v(\omega) \sim 1/\omega$  для частот в диапазоне

$$\tau_0^{-1} \exp(-E_{max}/T) < \omega < \tau_0^{-1} \exp(-E_{min}/T).$$

Если для оценок взять разумные значения  $E_{max} \sim 1 \text{ эВ} \sim 10^4 \text{ К}$  и  $\tau_0 \sim 10^{-12} \text{ с}$ , то для  $T \sim 300 \text{ К}$  имеем

$$\omega > 10^{12} \cdot \exp\left(-\frac{10^4}{300}\right) \sim 10^{12} \cdot e^{-33} \sim 10^{12} \cdot 5 \cdot 10^{-15} \approx 5 \cdot 10^{-3}.$$

Если же уменьшить температуру до  $200 \text{ К}$ , то  $e^{-50} \approx 2 \cdot 10^{-22}$  т.е.  $\omega > 10^{12} \cdot e^{-50} \approx 2 \cdot 10^{-10}$ . Это объясняет, почему  $1/f$  шум в металлах простирается до очень низких частот без видимого ослабления в эксперименте.

Подобные аргументы применимы и в случае квантового туннелирования; тогда время туннелирования связано с высотой барьера  $V$  и его шириной  $d$  соотношением

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\sqrt{V/V_0}\right),$$

где  $V_0 = \hbar^2 / 2md^2$ . (Действительно, действие  $S = \int_0^d p dx =$

$$= \int_0^d \sqrt{2m(E-V)} dx. \text{ Если } V(x) = \text{const}, \text{ а энергия частицы } E = 0, \text{ то}$$

$$S = d \cdot \sqrt{2mV} \quad \text{и} \quad \frac{S}{\hbar} = \frac{d}{\hbar} \sqrt{2mV} = \sqrt{2md^2V/\hbar^2} \equiv \sqrt{V/V_0}, \text{ что и}$$

требовалось доказать). Допуская, что  $V$  однородно распределено на масштабе  $V_0$ , аналогичные аргументы ведут  $1/f$  спектру.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое автокорреляционная функция случайного процесса?
2. Опишите характерные свойства  $1/f$  шума в металлах.
3. Какие механизмы движения дефектов в металлах приводят к  $1/f$  шуму?

## ПЛАНЫ ЛЕКЦИЙ

### Лекция 1.

1. Классические результаты для  $\rho(T)$  при  $T \rightarrow 0$ : формула Друде и правило Матиссена.
2. Диффузия электрона в случайном потенциале – классический подход.
3. Квантово-механическая интерференция – эффекты многократного рассеяния – качественное описание. ("эхо" в оптике мутной среды).
4. Количественное описание  $\delta\sigma/\sigma$  на языке классических "возвратных" траекторий.

### Лекция 2.

1. Анализ интерференционных поправок к  $\delta\sigma/\sigma$  для  $d = 2,1$  (степень близости к локализации).
2. Влияние магнитного поля  $H$  на квантовую интерференцию. Эксперимент.
3. Классическое описание электрон - электронного взаимодействия (ЭЭВ).
4. Природа квантовых поправок – усиление ЭЭВ в грязном металле.
5. Влияние усиления ЭЭВ на плотность состояний. Эксперимент.

### Лекция 3.

1. Два качественно различных подхода к описанию электропроводности однородно неупорядоченных сред: случай сильного беспорядка.
2. Порог подвижности и макроскопический критерий локализации.

3. Качественные предпосылки появления локализации электронов в классической и квантовой механике.

4. Модель Андерсона – её описание.

5. Двухямная задача и её качественный анализ. Понятие интеграла перекрытия и физика «обобществления» электронных состояний и их локализации.

#### **Лекция 4.**

1. Качественный анализ критерия локализации в модели Андерсона.

2. Корреляционная длина фазового перехода металл – диэлектрик  $L_c$  и её физический смысл. Перколяционная оценка  $L_c$ .

3. Результаты машинных расчетов в модели Андерсона.

4. Оценка корреляционной длины  $L_c$  из результатов по слабой локализации невзаимодействующих электронов.

5. Связь  $L_c$  и сопротивления образца конечных размеров для  $T=0$ .

6. Квазиметаллическая и активационная проводимости андерсоновского изолятора при  $T > 0$ .

7. Иерархия длин в неупорядоченном изоляторе.

#### **Лекция 5.**

1. Связь с флуктуационной теорией фазового перехода II - го рода.

2. Уравнение Гелл-Манна и Лоу и его анализ.

3. Выяснение зависимости корреляционной длины  $\xi_l$  от степени близости  $g$  к  $g_c$ .

4. Интерполяционная формула для проводимости в металлической фазе для  $T > 0$  и правило Муиджи.



## **Лекция 6.**

1. Аналогия с прыжковой проводимостью полупроводников.
2. Прыжковая проводимость в случае сильной и слабой локализации.
3. Вывод формулы для прыжковой проводимости.
4. Прыжковая проводимость с переменной длиной прыжка.

## **Лекция 7.**

1. Концепция эффективной среды и теория перколяции – общие соображения.
2. Проводимость перколяционной сетки и свойства бесконечного кластера.
3. Фрактальный подход к теории перколяции.
4. Приближенная связь геометрических и протекательных индексов.

## **Лекция 8.**

1. Практическая мотивация изучения проводимости малых образцов.
2. Представление о самоусредняемости физических величин: определение и критерий
  1. Мезоскопика – узкий и широкий смысл термина.
  4. Физические предпосылки появления аномальных флуктуаций кондактанса в «грязных» металлах.. ( формула Ландауэра, вычисление средней прозрачности и её флуктуаций ).

## **Лекция 9.**

1. Мезоскопические флуктуации магнитосопротивления ( «magnetofingerprints» ).
2. Мезоскопические флуктуации вольтамперной характеристики (ВАХ).

3. Сравнение квантовой и классической оценок влияния смещения примесей на мезоскопические флуктуации кондуктанса.

### **Лекция 10.**

1. Основные представления о  $1/f$  шуме в проводниках (феноменология).

2. Микроскопический механизм  $1/f$  шума в металлах.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	2
Лекция 1. Проблема беспорядка в электропроводности. (невзаимодействующие электроны).....	5
Лекция 2. Влияние магнитного поля на квантовую интерферен- ционную поправку к проводимости и эффекты электрон - электронного взаимодействия.....	12
Лекция 3. Андерсоновская локализация.....	24
Лекция 4. Андерсоновская локализация (продолжение ) .....	33
Лекция 5. Скейлинговая теория «сильной» локализации.....	41
Лекция 6. Прыжковая проводимость неупорядоченного (андерсоновского) изолятора.....	52
Лекция 7. Перколяционная электропроводность макро- неоднородных сред (дисперсных композитов).....	59
Лекция 8. Мезоскопические флуктуации.....	68
Лекция 9. Мезоскопические флуктуации (продолжение).....	79
Лекция 10. Универсальные флуктуации кондактанса и $1/f$ шум.....	90
Планы к лекциям.....	96
Содержание.....	100